

# IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA  
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VIII, N. 7

Serie nona

1 Luglio 1951

## Su alcune particolarità nella emissione degli ultrasuoni.

E. GROSSETTI

*Istituto di Fisica Sperimentale dell'Università - Napoli*

(ricevuto il 22 Febbraio 1951)

**Riassunto.** — In questo lavoro viene studiata per alcuni liquidi (acqua-olio di vasellina - soluzioni di acqua e glicerina - etilpoliglicolo) la variazione dell'intensità del reticolo di diffrazione prodotto da un quarzo emittente sulla frequenza  $\nu = 1,8$  MHz facendo variare la direzione del fascio luminoso rispetto alla superficie del quarzo e paragonando i risultati ottenuti con quelli teorici.

L'intensità dei raggi diffratti da un reticolo ultrasonoro può considerarsi data in modo molto soddisfacente dalla teoria di Raman e Nath, e non sono mancate misure accurate per mostrare che effettivamente tale teoria può ben ritenersi atta ad inquadrare i fatti sperimentali. Ora una delle deduzioni che possono ancora ritrarsi dalla teoria è una variazione della intensità quando il fascio luminoso non è parallelo alla superficie del quarzo emittente; gli stessi autori hanno dato la relazione in base alla quale può calcolarsi questa variazione. Indicando con  $v$  il quoziente  $2\pi\mu L/\lambda$ , dove  $L$  è lo spessore dello strato attraversato dagli ultrasuoni,  $\mu$  la massima variazione dell'indice,  $\lambda$  la lunghezza d'onda degli ultrasuoni, se  $\varphi$  rappresenta l'angolo che la direzione delle radiazioni luminose forma con la superficie del quarzo il valore di  $v$  da cui dipende la distribuzione dell'intensità nello spettro di diffrazione viene ad essere sostituito da un valore  $v'$  che è dato da:

$$(1) \quad v' = v \cdot \sec \varphi \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi L}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi \right)}{\frac{\pi L}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi}.$$

Non sono mancate ricerche sperimentali atte a dimostrare che una varia-

zione di direzione del fascio luminoso produce una modifica d'intensità e cioè una variazione nel numero delle righe degli spettri di diffrazione. NOMOTO <sup>(1)</sup> così ha potuto mostrare sperimentalmente che si hanno i massimi d'intensità appunto dove sono previsti teoricamente, quantunque il minimo

Fig. 1.

non è così accentuato come stabilisce la teoria; infatti per un angolo  $\varphi_K$  per il quale è soddisfatta la relazione

$$\operatorname{tg} \varphi_K = \pm \frac{K\lambda}{L},$$

deve scomparire, in base alla (1), ogni fenomeno di diffrazione. Questa man-

canza di completo accordo è stato da NOMOTO considerata dipendente da imperfezioni sperimentali. In altre serie di misure ha potuto mostrare come effettivamente si riesca a raggiungere il limite zero. Il NOMOTO ha anche dimostrato la esistenza di una leggera dissimmetria fra le due intensità delle righe a sinistra ed a destra.

Prove ancora più interessanti sono state fatte con  $\lambda$  molto più piccole da PARTHASARATHY, per le quali

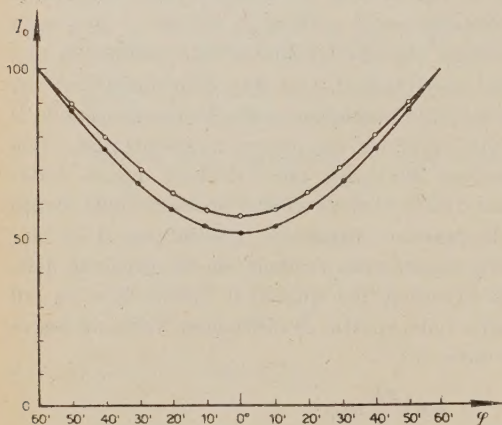


Fig. 2. - Acqua.

• valori sperimentali; ○ valori teorici

(1) O. NOMOTO: *Proc. Phys. math. Soc. Japan*, 24, 380 (1942).

in un certo modo si sono avuti risultati corrispondenti ai processi di riflessione alla Bragg. E risultati molto interessanti ha anche ottenuto nuovamente il NOMOTO <sup>(2)</sup> per i fenomeni di riflessione alla Bragg però in condizioni in cui l'intensità degli ultrasuoni è notevole. Si osserva inoltre una diversa distribuzione di intensità a sinistra ed a destra della riga centrale. Tale manifestazione può servire a dimostrare, come ha fatto SETTE <sup>(3)</sup>, che la forma delle onde, al crescere della distanza dalla sorgente, si scosta sempre più da quella piana.

Il quarzo generatore di ultrasuoni di dimensioni  $2,8 \times 1,8$  cm veniva immerso nel liquido da studiare, con una sola faccia a contatto con esso. La frequenza usata era di 1,8 MHz, e veniva

derivata agli estremi di un circuito oscillante del tipo di Hartley. La lamina

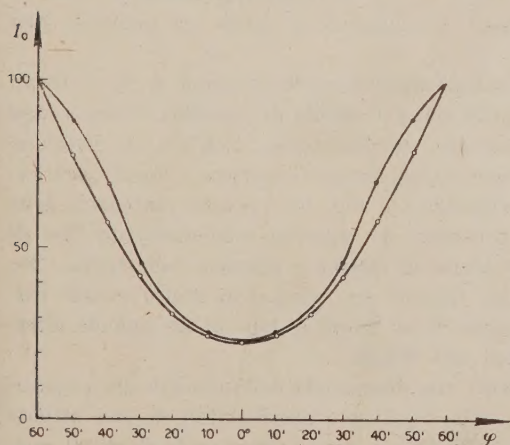


Fig. 4. - Soluzione glicerina-acqua.

• valori sperimentali; ○ valori teorici

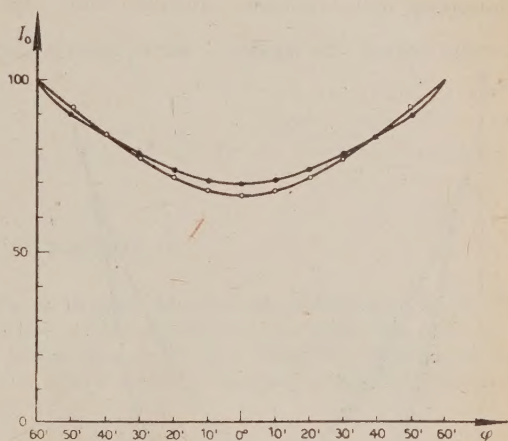


Fig. 3. - Olio di vasellina.

• valori sperimentali; ○ valori teorici

di quarzo poteva essere orientata con movimento micrometrico (le rotazioni venivano effettuate di  $10'$  in  $10'$ ) rispetto alla direzione del fascio luminoso (sorgente a vapore di sodio) di raggi paralleli provenienti da un collimatore. Il sistema di onde ultrasonore nel liquido, avendo avuto cura di disporre sul fondo della vaschetta del lamierino di ottone sagomato a spigoli vivi, era costituito da onde progressive.

La fig. 1 riproduce una

<sup>(2)</sup> O. NOMOTO: *Proc. Phys. math. Soc. Japan*, 24, 613 (1942).

<sup>(3)</sup> D. SETTE: *Nuovo Cimento*, 5, 1, (1948).



microfotometria relativa all'acqua: nelle condizioni sperimentali riportate si ha una sola riga, quella del primo ordine e dal rapporto fra l'intensità  $I_0$  dell'ordine zero ed  $I_1$  del primo ordine si ha modo di ricavare il valore di  $v$  e quindi ottenere  $v'$ , e cioè l'intensità per le varie orientazioni. Evidentemente l'intensità della centrale, quando come nel nostro caso si ha solo la

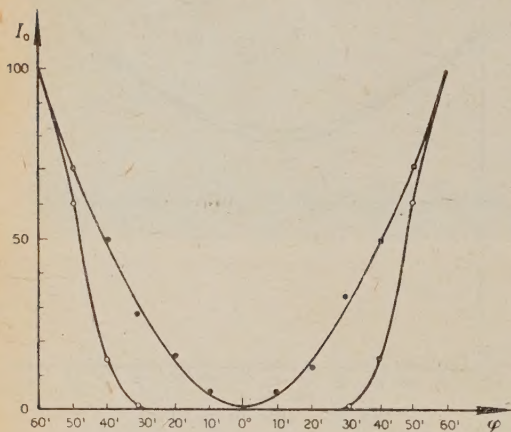


Fig. 5. — Etilpoliglicolo.

• valori sperimentali; o valori teorici

riga diffratta del 1° ordine, può ottenersi riportando a 100 la somma delle due intensità (ordine 0 ed ordine 1) e cioè ponendo  $100 = I_0 + 2I_1$ , da cui si ottiene  $I_0 = 100 - 2I_1$  per i vari valori di  $\varphi$ .

Le misure sono state fatte per i seguenti liquidi: acqua, soluzioni di acqua e glicerina, olio di vasellina, etilpoliglicolo; per questa sostanza compaiono anche le frange del 2° ordine. Si è anche studiata una sostanza quale l'etilpoliglicolo a struttura molecolare piuttosto complessa, per tale li-

quido l'intensità ultrasonora usata è maggiore in modo da giungere alla scomparsa della riga centrale.

Nella fig. 2 sono riportati i risultati relativamente all'acqua, in fig. 3 quelli relativi alla glicerina, in fig. 4 quelli relativi all'olio di vasellina. Come vedesi l'accordo può considerarsi abbastanza soddisfacente. Nell'olio di vasellina l'intensità sperimentale si mantiene quasi sempre superiore a quella teorica.

Il divario è notevole per l'etilpoliglicolo (fig. 5) e poichè l'intensità della centrale è maggiore di quella prevista, ciò significa evidentemente che gli spettri di diffrazione sono meno intensi di quanto è previsto dalla teoria. Ora questo comportamento si prevede quando per variazioni molto rapide dell'indice di rifrazione la propagazione di un fascio di luce in un reticolo ultrasonoro può dar luogo a riflessioni alla Bragg.

Si nota infine nella nostra lastra una dissimmetria dell'intensità degli spettri diffratti a sinistra ed a destra; nelle condizioni sperimentali da noi attuate tali dissimmetrie non superano il 10%. Com'è noto teoricamente finchè il quoziente  $f = La\lambda/n_0A^2$  è  $< 1$  tali dissimmetrie devono essere piuttosto piccole; nel nostro caso  $f$  vale  $4,3 \cdot 10^{-3}$  e quindi ci si trova nelle condizioni volute. Da quanto precede può concludersi che la teoria di Raman e Nath è ben

verificata per ciò che riguarda la variazione dell'intensità al variare dell'incidenza, ma bisogna pur riconoscere che, per alcuni liquidi in modo più accentuato, i valori sperimentali sono un poco superiori a quelli teorici, eccezione fatta per l'acqua.

Si ringrazia vivamente il Prof. CARRELLI per i consigli ed i mezzi messi a disposizione.

---

#### SUMMARY (\*)

This paper studies for some liquids (water - paraffine oil - solutions of water and glicerine - etylpolyglycol) the variation of the intensity of the diffraction grate produced by a quartz emitting with frequency  $\nu = 1,8$  MHz, when the direction of the light beam is changed referring to the quartz surface and comparing the results obtained with theory.

---

(\*) Traduzione a cura della Redazione.

## Sullo spettro di densità degli sciami estesi dell'aria.

P. BUDINI

*Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio degli ioni veloci veloci del C.N.R. - Padova*  
*Istituto di Fisica dell'Università - Trieste*

(ricevuto il 24 Marzo 1951)

**Riassunto.** — Assumendo, come le osservazioni sperimentali sembrano indicare, che la struttura trasversale degli sciami sia ben rappresentata dalla nota distribuzione teorica del MOLIÈRE, e lasciando imprecisato entro larghi limiti il modello di generazione dello sciame, si descrive un metodo per la deduzione dei parametri caratteristici dello spettro di densità, che vengono in tal modo ad assumere espressioni suscettibili di diretta interpretazione fisica. Si specializzano le formule nell'ipotesi che gli sciami siano generati da singoli elettroni primari e che si sviluppino secondo il modello della pura cascata elettromagnetica. Si esegue un confronto tra dati teorici e dati sperimentali e si conclude che mentre alcuni elementi sperimentali si possono mettere in accordo con i corrispondenti teorici, con una opportuna scelta dell'esponente dello spettro primario, per altri dati, soprattutto quelli relativi a sciami di grande densità registrati in alta quota, il disaccordo sembra essere considerevole.

### 1. — Introduzione.

Le esperienze di WILLIAMS <sup>(1)</sup>, COCCONI e coll. <sup>(2)</sup>, AMALDI e coll. <sup>(3)</sup>, unitamente ai calcoli di MOLIÈRE <sup>(4)</sup>, hanno mostrato che la struttura trasversale degli sciami estesi, a distanza non troppo piccola dall'asse <sup>(5)</sup>, non presenta un aspetto essenzialmente diverso da quello previsto dalla teoria a cascata

<sup>(1)</sup> R. W. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1689 (1948).

<sup>(2)</sup> G. COCCONI, V. COCCONI-TONGIORGI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **76**, 1020 (1949).

<sup>(3)</sup> E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 401 e 816 (1950).

<sup>(4)</sup> *Cosmic Radiation* edited by W. Heisenberg, (New York, 1946), p. 26.

<sup>(5)</sup> J. M. BLATT: *Phys. Rev.*, **75**, 1584 (1949).



nell'ipotesi dell'elettrone primario; ipotesi che d'altra parte è contraddetta da numerosi altri fatti sperimentali quali per esempio la natura essenzialmente nucleonica della radiazione primaria e la presenza negli sciami estesi di una relativamente abbondante componente nucleonica. Si è indotti a concludere che se, come probabile, lo sciame esteso si sviluppa, almeno nei primi stadi, seguendo un modello sostanzialmente diverso da quello della pura cascata elettromagnetica, la struttura trasversale osservata non conserva in modo sensibile l'impronta di questo modello, conclusione abbastanza naturale quando si pensi che alla struttura trasversale dello sciame, comunemente osservata, contribuiscono principalmente elettroni di bassa energia i quali, in ogni caso, saranno prodotti ultimi di normali cascate elettroniche. Non è tuttavia da escludere a priori che pur rimanendo nell'ambito della componente fotoelettronica esistano altri aspetti degli sciami estesi che siano sperimentalmente osservabili e che più della struttura trasversale conservino l'impronta del particolare modello di generazione dello sciame; uno di questi potrebbe, per es., essere la struttura longitudinale dello sciame.

Uno degli elementi della fenomenologia degli sciami estesi più studiati e meglio noti sperimentalmente è senza dubbio il noto spettro di densità cioè la frequenza  $H(\Delta, t)$  degli sciami di densità maggiore di  $\Delta$  che colpiscono un dispositivo sperimentale posto a  $t$  unità di radiazione al di sotto del limite superiore dell'atmosfera e al quale le osservazioni sperimentali assegnano la forma:

$$(1) \quad H(\Delta, t) = \frac{K(t)}{\Delta^{\Gamma(\Delta, t)}},$$

dove si ritiene  $\Gamma$  dipendente, anche se debolmente, da  $\Delta$  e da  $t$ .

Scopo del presente lavoro è quello di ricavare l'espressione (1) partendo da ipotesi alquanto generali che potranno poi venire specializzate ai vari possibili modelli di generazione degli sciami.

## 2. - Ipotesi.

Porremo a base della nostra elaborazione le seguenti due ipotesi:

a) Al limite dell'atmosfera arrivano, da direzioni distribuite isotropicamente entro l'angolo solido  $2\pi$ , particelle che, urtando contro i nuclei dell'aria danno origine ai grandi sciami. Ammettiamo che il numero di particelle che arrivano per  $m^2$ , per s, e per unità d'angolo solido, di energia compresa tra  $E$  e  $E + dE$  sia dato da

$$(2) \quad \nu(E) dE = \frac{A}{E^{n+1}} dE,$$

dove  $A$  sia costante e  $n$  vari molto lentamente con  $E$ .

b) La struttura trasversale dello sciame sia rappresentata dalla nota funzione di Molière.

Lo spettro (2) è di solito universalmente ammesso; piuttosto incerti sono i valori di  $A$  e di  $n$ ; in quanto all'ammessa isotropia, essa è giustificata dai valori di  $E$  che gli sciami estesi presuppongono e che escludono l'influenza del campo magnetico terrestre.

L'ipotesi b) esprime il risultato dei citati lavori sperimentali e delle considerazioni svolte nell'introduzione. Ci sarebbe da osservare che i noti calcoli di MOLIERE si riferiscono al massimo di sviluppo dello sciame e che dai recenti calcoli di BORSELLINO (6) si deduce che la larghezza dello sciame dipende dalla profondità  $E$  anche dopo passato il massimo, contrariamente a quanto si riteneva un tempo. A questo proposito c'è da osservare che, come vedremo, gli sciami che vengono osservati sperimentalmente sono, almeno nei casi contemplati in questo lavoro, poco lontani dal massimo del loro sviluppo, di modo che si può ritenere che il divario tra la larghezza vera e quella di MOLIERE calcolata al massimo non sia grande; inoltre il calcolo rivela, come osservato anche da AMALDI e coll. (3) e da BLATT (5) in caso parallelo, che la forma della struttura trasversale adottata non è critica per la deduzione della (1) di modo che si può confidare che piccoli scarti dalla ipotesi b) comporranno solo errori molto piccoli.

### 3. - Intensità verticale.

In un primo tempo ci occuperemo dei soli sciami generati da primari che arrivano in direzione verticale entro l'angolo solido  $d\Omega$  e supporremo che l'asse dello sciame conservi la direzione di provenienza del primario cioè sia verticale.

Allora, indicando col MOLIERE con  $N(r)rdr$  la probabilità che un elettrone cada a distanza tra  $r$  e  $r + dr$  dall'asse dello sciame, ove  $r$  va misurata in unità  $r_1 = a/t$  metri, dove  $a = 1413$  e  $t$  è la quota d'osservazione misurata in unità di radiazione, e con  $\Pi(E, t)$  il numero totale di elettroni esistenti a quota  $t$  in uno sciame generato da un primario d'energia  $E$ , la densità media  $\Delta$  di elettroni, misurata in  $m^{-2}$ , a distanza  $r$  dall'asse dello sciame sarà data da:

$$(3) \quad \Delta = \frac{\Pi(E, t)N(r)t^2}{2\pi a^2},$$

dalla quale abbiamo:

$$(4) \quad N(r) = \frac{2\pi a^2 \Delta}{\Pi(E, t)t^2} = x,$$

(6) A. BORSELLINO: *Nuovo Cimento*, 6, 543 (1949); 7, 323 e 638 (1950).



che definisce la funzione inversa:

$$(5) \quad r = F(x).$$

Entro l'area circolare di raggio  $r$  e centro sull'asse dello sciame, la densità media degli elettroni sarà maggiore di  $\Delta$ . La superficie di quest'area misurata in  $m^2$  sarà:

$$(6) \quad \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{t^2} F^2[2\pi a^2 \Delta / \Pi(E, t)t^2].$$

Allora <sup>(7)</sup> la frequenza  $h(\Delta, t)$  di sciami estesi dovuti a primari che arrivano al limite dell'atmosfera in direzione verticale entro l'angolo solido  $d\Omega$  e che passano per un dato punto situato a quota  $t$  con densità media di elettroni maggiori di  $\Delta$  sarà dato da <sup>(8)</sup>:

$$(7) \quad h(\Delta, t) d\Omega = \pi A \frac{a^2}{t^2} d\Omega \int_0^\infty F^2[2\pi a^2 \Delta / \Pi(E, t)t^2] E^{-(n+1)} dE.$$

Che, tenendo conto delle (3) e (6), può esser scritta:

$$(8) \quad h(\Delta, t) = \pi A \int_0^\infty r^2 E^{-(n+1)} \frac{\partial E}{\partial r} dr.$$

Se ora noi poniamo a quota  $t$  un dispositivo sperimentale e vogliamo che la (7) o la (8) ci diano il numero di sciami che colpiscono tutte le parti del dispositivo sperimentale con densità maggiore di  $\Delta$ , è evidente che la (8) sarà ancora valida solo finché l'estensione orizzontale del dispositivo sperimentale sarà trascurabile rispetto a  $r_m$ : minimo valore di  $r$  per il quale la funzione integranda della (8) è sensibilmente diversa da 0. Per fissare le idee, indicando con  $l$  la metà della massima dimensione orizzontale del dispositivo sperimentale misurato in metri, la condizione precedente si scriverà:

$$(9) \quad r_m \gg \frac{l}{r_1} = \frac{lt}{a}.$$

Se questa non è soddisfatta avverrà che in alcuni sciami (quelli di energia

<sup>(7)</sup> Vedi anche G. COCCONI, A. LOVERDO e V. TONGIORGI: *Phys. Rev.*, **70**, 846 (1946).

<sup>(8)</sup> In realtà l'integrale che compare nella (7) andrebbe limitato inferiormente alla energia del taglio di latitudine  $E_\lambda$ ; tuttavia si vede facilmente che la funzione integranda cessa di dare contributi apprezzabili già per  $E$  molto maggiore di  $E_\lambda$ .

più piccola) solo una parte del dispositivo sperimentale sarà coperta da elettroni con densità maggiore di  $\Delta$ ; in tal caso, affinché la (8) mantenga il significato sopra definito, la funzione integranda del secondo membro andrebbe moltiplicata per una funzione che è prossima a uno per  $r \gg lt/a$  e che è praticamente zero per  $r \ll lt/a$ ; noi per semplicità la identificheremo con la nota funzione a gradino  $1(r - lt/a)$  di modo che la (8) si scriverà:

$$(8') \quad h(\Delta, t) = \pi A \int_{lt/a}^{\infty} r^2 E^{-(n+1)} \frac{\partial E}{\partial r} dr,$$

e la (7):

$$(7') \quad h(\Delta, t) = \pi A \frac{a^2}{t^2} \int_{E_m}^{\infty} F^2 [2\pi a^2 \Delta / II(E, t) t^2] E^{-(n+1)} dE,$$

dove l'energia  $E_m$  si determina tramite la (3) ove si ponga  $lt/a$  al posto di  $r$ . In tal modo si tiene conto, per lo meno in modo approssimativo, dell'effetto delle dimensioni finite del dispositivo sperimentale, effetto che, in alcuni casi, è tutt'altro che trascurabile.

Vogliamo ora determinare qual'è il valore di  $E$  che dà il massimo contributo all'integrale (7'); a tal fine scriviamo la (7') nella forma:

$$(9) \quad h(\Delta, t) = \pi A \frac{a^2}{t^2} \int_{\log E_m}^{\infty} \exp [2 \log F - nz] dz,$$

in tal modo si vede facilmente che la funzione integranda presenta un massimo acuto in corrispondenza di

$$(10) \quad \bar{E} = -\frac{n}{2} \left( \frac{d \log F}{d \log x} \frac{\partial \log II}{\partial E} \right)^{-1},$$

e questa sarà l'energia cercata purchè naturalmente risulti  $\bar{E} > E_m$ . La prima derivata che compare nella (10) dipende solo dalla adottata distribuzione di Molière. Per il suo calcolo può essere usata la funzione

$$(11) \quad r = F(x) = \frac{b + cx^{-1/4}}{d + x} \quad \text{con } b = 3,25; \quad c = 5,2; \\ d = 19,35,$$

che approssima abbastanza bene l'inversa della funzione  $N(r)$  di Molière nell'intervallo di interesse pratico  $1 < x < 50$  con un errore massimo del 20% e ne rispetta l'andamento al limite per  $x \rightarrow 0$  e  $x \rightarrow \infty$ . La doppia derivata

logaritmica della (11) corretta successivamente sul grafico di Molière è stata riportata in fig. 1 in funzione di  $x$ .

Supponiamo ora che si possa porre

$$(12) \quad \Pi(E, t) = E^s f(s, t),$$

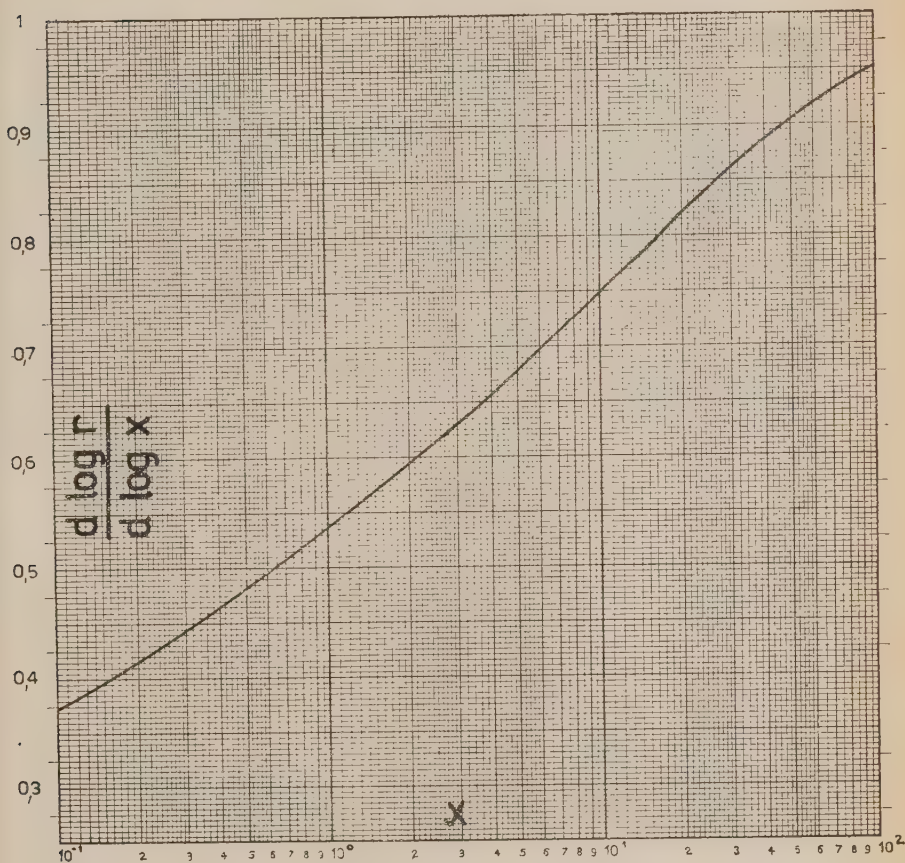


Fig. 1.

dove  $s$ , e  $f(s, t)$  tramite la  $s$ , siano funzioni lentamente variabili con  $E$ : poniamo precisamente che  $E$ ,  $s$  e  $t$  siano legate da una generica relazione:

$$(13) \quad \psi(E, s, t) = 0.$$

Allora introducendo nell'integrale (7') la variabile d'integrazione  $x$  legata



alla  $E$  dalla relazione (4), otteniamo:

$$(14) \quad h(\Delta, t) = \pi A \frac{a^2}{t^2} \int_0^{N(t/a)} F^2(x) \left[ \frac{xt^2 f(s, t)}{2\pi a^2 \Delta} \right]^{n/s} (1 + \alpha)^{-1} \frac{dx}{sx},$$

dove

$$(15) \quad \alpha = \frac{\partial \log f(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \log s}{\partial E}$$

è, per le ipotesi fatte, un numero piccolo dipendente debolmente da  $E$  e quindi da  $x$ .

Applicando il teorema del valore medio possiamo porre la (14) nella forma

$$(16) \quad h(\Delta, t) = \pi A \frac{a^2}{t^2} \Delta^{-(\bar{n}/\bar{s})} \int_0^{N(t/a)} F^2(x) \left[ \frac{xt^2 f(s, t)}{2\pi a^2} \right]^{n/s} (1 + \alpha)^{-1} \frac{dx}{sx};$$

abbiamo così posto la  $h(\Delta, t)$  nella forma (1) cioè:

$$(17) \quad h(\Delta, t) = \frac{k(t)}{\Delta^\gamma},$$

con

$$(18) \quad \gamma = \bar{n}/\bar{s}(\Delta, t),$$

e

$$(19) \quad k(t) = \pi A \frac{a^2}{t^2} \int_0^{N(t/a)} F^2(x) \left[ \frac{xt^2 f(s, t)}{2\pi a^2} \right]^{n/s} (1 + \alpha)^{-1} \frac{dx}{sx}.$$

Siccome per le ipotesi fatte  $s$  e  $n$  dipendono poco da  $E$  e quindi da  $x$  possiamo, adottando un procedimento usuale nei calcoli degli integrali col metodo della sella, prendere per  $\bar{n}/\bar{s}$  il valore corrispondente al massimo della funzione integranda della (19), cioè le  $\bar{n}$  e  $\bar{s}$  definite dalle:

$$(13') \quad \psi(E, \bar{s}, t) = 0; \quad \bar{n} = n(\bar{E}),$$

dove  $\bar{E}$  è definito dalla (10).

Abbiamo così in definitiva che dati  $\Delta$  e  $t$ , le (10) e (13') assieme alle (4) e (12) ci permettono di calcolare: la  $E$ , energia dei primari che dà il più importante contributo alla intensità verticale di sciame di densità maggiore di  $\Delta$  a quota  $t$ ,  $\bar{s}$  e  $\bar{n}$  che, tramite la (18), ci danno l'esponente teorico dello spettro di densità verticale, e  $\bar{r}$  distanza dal dispositivo sperimentale alla quale cadono

gli assi degli sciami che danno il massimo contributo all'intensità verticale nelle ipotesi poste.

Si può procedere ulteriormente nel calcolo analitico se si suppone che anche il fattore

$$\frac{[t^2 f(s, t) 2\pi a^2]^{n, s}}{(1 + \alpha)s}$$

sia poco dipendente da  $x$ . In tal caso la (16) si può scrivere:

$$(20) \quad h(\Delta, t) = \frac{\pi A a^2}{s(1 + \alpha)} \frac{t^{2(\gamma-1)}}{\Delta^\gamma} [f(\bar{s}, t)/2\pi a^2]^\gamma \int_0^{N(t/a)} F^2(x) x^{n/s-1} dx.$$

L'integrale che vi compare può essere spezzato in due:

$$\int_0^N = \int_0^\infty - \int_N^\infty;$$

sostituendo nel primo l'espressione della  $F(r)$  data dalla (11) si ottiene una somma di tre integrali del tipo

$$\int_0^\infty x^d (c + x)^{-2} dx,$$

che possono essere calcolati col metodo dei residui al polo  $x = -c$  (\*). Per il secondo integrale osserviamo che nei casi usuali  $l$  è abbastanza piccola da poter sostituire la  $N(r)$  con la espressione asintotica per  $r > 0$ :  $b/r$  e la  $F(r)$  con  $b/x$ ; si ottiene così:

$$(21) \quad h(\Delta, t) = \frac{1}{\Delta^\gamma} \frac{\pi A a^2}{s(1 + \alpha)} t^{2(\gamma-1)} [f(\bar{s}, t)/2\pi a^2]^\gamma \left[ B(\gamma) - \frac{b^\gamma}{2} - \gamma \left( \frac{lt}{a} \right)^{2-\gamma} \right]$$

con

$$B(\gamma) = \frac{\pi}{d^{2-\gamma}} \left[ \frac{b^2(\gamma-1)}{\text{sen}(\gamma-1)\pi} + \frac{2bc(\gamma-1,25)d^{-1/4}}{\text{sen}(\gamma-1,25)\pi} + \frac{c^2(\gamma-1,5)d^{-1/2}}{\text{sen}(\gamma-1,5)\pi} \right].$$

che può essere calcolata numericamente.

La (21) non si presta al confronto diretto con l'esperienza in quanto il suo valore dipende dalla costante  $A$  sulla quale non si hanno informazioni precise; per eliminarla dalle nostre considerazioni prenderemo in esame l'espres-

(\*) E. T. WHITTAKER e G. N. WATSON: *Modern Analysis* (Cambridge, 1946), pag. 111

sione:

$$(22) \quad \lambda_v(\Delta, t) = \frac{\partial \log h(\Delta, t)}{\partial t},$$

che rappresenta l'inverso dello spessore d'assorbimento dell'intensità verticale considerata; in particolare l'equazione:

$$\lambda_v(\Delta, T_v) = 0,$$

darà la quota  $T_v$  del massimo di intensità verticale teorico, che potrà quindi esprimersi come funzione della sola  $\Delta$ .

Queste grandezze sono suscettibili di diretta verifica sperimentale; ed è da pensare che, soprattutto per  $t$  non troppo grande, siano piuttosto strettamente connesse col modello particolare che si assume per la generazione degli sciami estesi.

#### 4. — Distribuzione zenitale e intensità totale.

Supponiamo ora che le particelle primarie che prendiamo in considerazione e quindi gli assi degli sciami estesi da esse generate formino un angolo  $\theta$  con la verticale. È chiaro che potremo ripetere le considerazioni fatte nel numero precedente salvo che sarà necessario tener conto del fatto che lo sciame alla quota  $t$  ha attraversato  $t/\cos \theta$  unità di radiazione di modo che la  $\Pi(E, t)$  delle formule precedenti andrà sostituita con  $\Pi(E, t/\cos \theta)$ .

Inoltre sarà necessario definire con precisione quel che vogliamo intendere con la parola densità. Infatti la  $\Delta$  che compare nella corrispondente della (3)

$$(3') \quad \Delta = \frac{\Pi(E, t/\cos \theta) N(r) t^2}{2\pi a^2},$$

sarà la densità definita come numero di particelle per unità di superficie disposta perpendicolarmente all'asse dello sciame. Se invece vogliamo che nella (1) compaia la densità  $\Delta_0$  definita come numero di particelle per unità di superficie disposta orizzontalmente (il che sarà opportuno se registriamo gli sciami con dei piatti di contatori), siccome  $\Delta_0 = \Delta \cos \theta$ , sarà necessario sostituire nelle formule precedenti  $\Delta$  con  $\Delta_0/\cos \theta$ . Noi per generalità abbiamo sostituito  $\Delta$  con  $\Delta/\cos^3 \theta$  dove  $\delta$  può assumere un qualsiasi valore da 0 a 1 a seconda del significato che si vuol far assumere a  $\Delta$ , o piuttosto del dispositivo sperimentale col quale vengono rilevati gli sciami ai quali si riferiscono le considerazioni teoriche.

Le altre  $t$  che compaiono nelle formule precedenti non andranno modificate in quanto intervengono solo come fattore di trasformazione per l'unità



di radiazione a quota  $t$  e quindi sono indipendenti da  $\theta$ . Di modo che la formula corrispondente alla (14) e rappresentante l'intensità relativa all'angolo solido  $d\Omega$  di angolo zenitale  $\theta$  sarà:

$$(14') \quad h_{\theta}(\Delta, t) d\Omega = \pi A \frac{a^2}{t^2} d\Omega \int_0^{N(l/a)} F^2(x) \left[ \frac{xt^2 \cos^{\delta} \theta f(s, t/\cos \theta)}{2\pi a^2 \Delta} \right]^{n/s} \frac{dx}{s(1 - \alpha)x}.$$

e la corrispondente della (21):

$$(21') \quad h_{\theta}(\Delta, t) d\Omega = \frac{1}{\Delta^{\frac{\bar{n}}{s}}} \frac{\pi A a^2}{s(1 + \alpha)} t^{2(\frac{\bar{n}}{s} - 1)} [f(\bar{s}, t/\cos \theta)/2\pi a^2]^{\bar{n}/\bar{s}} \times \\ \times \left[ B(\bar{n}/\bar{s}) - \frac{b^{\bar{n}/\bar{s}}}{2 - \bar{n}/\bar{s}} \left( \frac{lt}{a} \right)^{2 - \bar{n}/\bar{s}} \right] \cos^{\delta \bar{n}/\bar{s}} \theta.$$

Se  $l$  e  $\theta$  non sono troppo grandi, tenendo conto che il termine in cui compare la  $l$  è un termine correttivo, si potrà in prima approssimazione sostituire  $l$  con  $l/\cos \theta$ ; allora la (14') si può scrivere:

$$(23) \quad h_{\theta}(\Delta, t) = h(\Delta, t/\cos \theta) (\cos \theta)^{2(\frac{\bar{n}}{s} - 1) - \delta \bar{n}/\bar{s}},$$

dove naturalmente la  $\bar{s}$  e la  $\bar{n}$  saranno quelle relative a  $\Delta/\cos^{\delta} \theta$  e  $t/\cos \theta$ .

L'intensità verticale totale si otterrà ora facilmente dalla (23) integrando all'angolo solido  $2\pi$ :

$$(24) \quad H(\Delta, t) = \int_{2\pi} h_{\theta}(\Delta, t) d\Omega = 2\pi \int_0^{2\pi} h(\Delta, t/\cos \theta) (\cos \theta)^{\bar{n}, \bar{s}(2 - \delta) - 2} \sin \theta d\theta.$$

Operando la sostituzione  $t/\cos \theta = z$  si ottiene:

$$(25) \quad H(\Delta, t) = 2\pi \int_t^{\infty} h(\Delta, z) z^{-\frac{\bar{n}}{s}(2 + \delta)} t^{\frac{\bar{n}}{s}(2 + \delta) - 1} dz.$$

che, tenendo conto della (17) può esser posta nella forma:

$$(26) \quad H(\Delta, t) = 2\pi \int_t^{\infty} \frac{k(z)}{\Delta^{\frac{\bar{n}}{s}}} z^{-\frac{\bar{n}}{s}(2 + \delta)} t^{\frac{\bar{n}}{s}(2 + \delta) - 1} dz = \frac{K(t)}{\Delta^{\frac{\bar{n}}{s}}},$$

che si identifica con la formula (1) con:

$$(27) \quad \Gamma = \frac{\bar{n}(\Delta, t)}{\bar{s}(\Delta, t)},$$

dove  $\bar{s}$  e  $\bar{n}$  sono valori opportuni di  $\bar{s}(\Delta, t)$  e di  $\bar{n}(\Delta, t)$  calcolati nell'intervallo  $t, \infty$ ; ora sia  $\bar{s}$  che  $\bar{n}$  sono molto lentamente variabili con  $t$  di modo che per il loro calcolo si potrebbe adottare il procedimento usato nel numero precedente; senonchè la funzione integranda nella (25) ha andamento monotono nell'intervallo d'integrazione; nella (24) invece la funzione integranda presenta un massimo, che può esser acutizzato ponendo  $\theta d \log \theta$  al posto di  $d\theta$ , e che si ha per  $\theta = \bar{\theta}$  determinato dalla:

$$(28) \quad \left. \frac{\partial \log h_{\theta}(\Delta, t)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \bar{\theta}} + \cotg \bar{\theta} + \frac{1}{\bar{\theta}} = 0.$$

cioicchè porremo:

$$(29) \quad \begin{cases} \bar{s} = \bar{s}(t/\cos \bar{\theta}, \Delta/\cos^{\delta} \bar{\theta}) \\ \bar{n} = \bar{n}(t/\cos \bar{\theta}, \Delta/\cos^{\delta} \bar{\theta}). \end{cases}$$

Applichiamo ora il teorema della media alla (25); otteniamo

$$(30) \quad H(\Delta, t) = \frac{2\pi}{(2 + \delta)\Gamma - 1} h[\Delta, t + \tau(t)],$$

dove  $\tau(t)$  è una funzione di  $t$  delle dimensioni di una lunghezza e sempre positiva; risulta che la  $H(\Delta, t)$  avrà un massimo per  $t = T$  tale che

$$T = \tau(T) + T_r,$$

la quale afferma che la quota  $T$  del massimo d'intensità totale si ha ad una quota più alta di quella  $T_r$  del massimo di intensità verticale; e si avrà di più che per  $t \gg T_r$  siccome la funzione integranda nella (25) decresce molto rapidamente al crescere di  $z$  la  $\tau(t)$  sarà molto piccola e quindi la  $H(\Delta, t)$  presenterà una dipendenza da  $t$  molto simile a quella della  $h(\Delta, t)$ . Questo non sarà più vero per  $t < T_r$  quando cioè la  $H(\Delta, t)$  e la  $h(\Delta, t)$  potranno avere derivate rispetto a  $t$  di segno opposto. Si potrà ottenere un risultato approssimativo ponendo  $t + \tau(t) = t/\cos \bar{\theta}$ , allora la (30) si scrive:

$$(31) \quad H(\Delta, t) = \frac{2\pi}{(2 + \delta)\Gamma - 1} h(\Delta, t/\cos \bar{\theta}),$$

e il coefficiente dell'assorbimento dell'intensità totale sarà dato da:

$$(32) \quad \lambda(\Delta, t) = \frac{\partial \log H(\Delta, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_v(\Delta, t/\cos \bar{\theta})}{\cos \bar{\theta}},$$

che uguagliata a 0 determinerà la quota  $T$  del massimo di intensità totale.

## 5. - Applicazione all'ipotesi dell'elettrone primario.

Applicheremo ora i risultati dei calcoli sopra esposti all'ipotesi che le particelle della radiazione primaria siano costituite da elettroni. È noto che questa ipotesi è, oggi, quasi certamente, da scartarsi; un calcolo che la presupponga non è tuttavia privo di interesse in primo luogo perchè, come accennato nella introduzione, fino ad ora, per quanto è a nostra conoscenza sono rare le evidenze sperimentali relative alla sola componente fotoelettronica degli sciami estesi che decisamente contraddicano l'ipotesi dell'elettrone primario, mentre è da queste contraddizioni che si potrebbero trarre indizi utili sulla vera natura degli sciami estesi; in secondo luogo perchè calcoli dello stesso genere sono stati, in parte, già fatti con metodo diverso <sup>(7)</sup> <sup>(10)</sup> <sup>(11)</sup> e quindi un confronto coi risultati di questi ultimi potrà fornire un criterio sulla attendibilità del metodo proposto, e sulla sua applicabilità ad altri modelli di generazione. In conformità a quanto assunto generalmente cominceremo col supporre  $n$  indipendente da  $E$  e uguale a 1,8.

Tutto si riduce a sostituire nelle formule precedenti a  $\Pi(E, t)$  il numero totale di elettroni che si ha a profondità  $t$  in uno sciame esteso iniziato da un elettrone primario di energia  $E$ ; questo numero è stato, come noto, calcolato da diversi autori; noi ci siamo serviti dei risultati dei calcoli di Rossi e GREISEN <sup>(12)</sup> in approssimazione  $B$  (formula (2.104)). Risulta così che, riferendosi alle (12) e (13), si può porre:

$$(12') \quad f(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \frac{H_1(s)K_1(s, -s)}{[\lambda_1''(s)t + 1/s^2]^{1/2}} \exp [\lambda_1'(s)t] ;$$

$$(13') \quad \psi(E, s, t) = \log E + \lambda_1'(s)t - \frac{1}{s},$$

dove intendiamo che l'energia  $E$  sia misurata in unità  $E_c$  = energia critica relativa all'aria e gli altri simboli sono riportati dal citato lavoro. Iniziamo col determinare  $\bar{E}$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{r}$ , e  $\bar{s}$ ; a tale scopo è necessario esplicitare la (10). Dalle due precedenti formule, abbiamo che <sup>(13)</sup>:

$$\frac{\partial \log \Pi(E, t)}{\partial E} = \frac{s}{E} \left( 1 - \frac{1}{1 + \lambda_1''(s)s^2 t} + \text{termini trascurabili} \right)$$

<sup>(10)</sup> H. W. LEWIS: *Phys. Rev.*, **73**, 1341 (1948).

<sup>(11)</sup> L. JANOSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1950), p. 318.

<sup>(12)</sup> B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

<sup>(13)</sup> I termini trascurati sono:

$$\frac{[1 + \lambda_1''(s)s^2 t][s(H_1'/H_1 + K_1'/K_1) - 1] + 1/2[\lambda_1'''(s)s^2 t - 2]}{[1 + \lambda_1''(s)s^2 t]^2}$$



di modo che la (10) diventa:

$$(10') \quad \frac{d \log F(x)}{dx} = -\frac{n}{2s} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_1^2(s)s^2 t} \right),$$

la quale definisce un legame tra  $\bar{s}$ ,  $t$  e  $x$ , legame che può essere facilmente

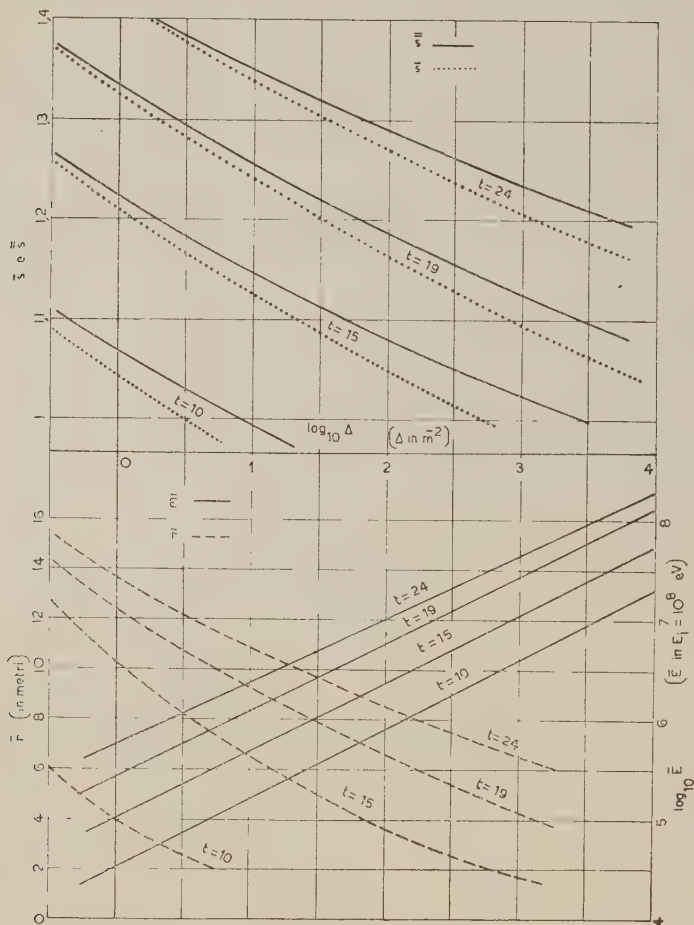


Fig. 2.

determinato servendosi del grafico di fig. 1. A sua volta  $x$ , come risulta dalla (4) è funzione di  $\Delta$  e  $t$ , di modo che  $\bar{s}$  sarà anch'essa determinata dalla (10') come funzione di  $s$  e di  $t$ . Per ottenere praticamente tale dipendenza conviene

fissare, per es., un valore di  $t$ , poi far variare  $s$  e in corrispondenza, trovare i valori di  $E$ , tramite la (13') e di  $\Pi(E, t)$  tramite la (12'); introdotti questi valori nella (4) si ottengono i valori di  $\Delta$  corrispondenti al dato valore di  $t$  per i vari valori di  $\bar{s}$ . In tal modo si ottiene non solo  $\bar{s}(\Delta, t)$  ma anche  $\bar{E}(\Delta, t)$ ; e dalla relazione tra  $\bar{s}$  e  $x$  definita dalla (10'), tenuto conto della (5) si può facilmente determinare la funzione  $\bar{r}(\Delta, t)$  che dovrà soddisfare alla relazione (9) ovvero alla (14):

$$l < \frac{\bar{r}a}{t},$$

che è presupposta nei nostri calcoli e, in gran parte dei calcoli che usualmente si fanno sugli sciami estesi.

Le funzioni  $\bar{E}$ ,  $\bar{r}$  e  $\bar{s}$ , così calcolate sono state riportate in fig. 2.

I valori trovati per  $\bar{E}$  e  $\bar{r}$  sono minori di quelli corrispondenti riportati dal JANOSSY (11); dato che il metodo da noi seguito per questa parte del calcolo è sostanzialmente equivalente a quello seguito dal JANOSSY e che noi abbiamo assunto dalle espressioni più attendibili sia per la  $N(r)$  che per la  $\Pi(E, t)$  è da ritenere che anche i dati da noi riportati siano più attendibili di quelli corrispondenti del JANOSSY.

Passiamo ora al calcolo del coefficiente d'assorbimento dell'intensità verticale definito dalla (22), dove per  $h(\Delta, t)$  prenderemo l'espressione data dalla (20). Osserviamo che in questa, adottando un procedimento usuale nel metodo della sella, abbiamo identificato il valor medio del fattore (19') con quello calcolato in  $\bar{s}$ ; l'entità dell'errore commesso in questo tipo di approssimazione non è purtroppo facilmente valutabile di modo che le considerazioni che nel seguito si riferiranno alla  $\lambda$  andranno intese come aventi solo un carattere indicativo. Abbiamo dunque:

$$\lambda_v(\Delta, t) = \frac{\partial \log h}{\partial t} + \frac{\partial \log h}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = \frac{n}{\bar{s}} \lambda_1(\bar{s}) + \left( \frac{n}{\bar{s}} - 1 \right) \frac{2}{t} + \\ + \frac{\partial \log h}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \text{termini trascurabili},$$

il termine  $\frac{\partial \log h}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial t}$  è molto piccolo e può esser calcolato tenendo conto delle (16), (12') e (13'); si ottiene così:

$$(22') \quad \lambda_v(\Delta, t) = \frac{n}{\bar{s}} \lambda_1(\bar{s}) + \left( \frac{n}{\bar{s}} - 1 \right) \left( \frac{2}{t} - \frac{\lambda'_1(\bar{s})}{\bar{s} \lambda_1(\bar{s}) t} \right) + \text{termini trascurabili},$$

osserviamo che il primo termine (negativo) è il preponderante e rappresenta

(14) Se si aumenta  $l$  tanto da far sì che la disuguaglianza non sia più soddisfatta, avverrà che la  $\bar{E}$  che dà il massimo contributo all'integrale (7') aumenterà e conseguentemente diminuirà la  $\bar{s}$ , che provocherà un aumento di  $\gamma$  come già osservato anche da altri (5).

il contributo del coefficiente d'assorbimento dei singoli sciami, e dell'esponente dello spettro primario, il secondo termine (positivo) è dovuto principalmente al variare della lunghezza dell'unità di radiazione e quindi delle dimensioni trasversali degli sciami al variare di  $t$ . Tra i termini trascurati c'è il termine relativo alle dimensioni finite del dispositivo sperimentale che è piccolo (dell'ordine di 1% di  $\lambda_v$  per  $\Delta < 10^3$ ,  $l < 5$  m), negativo, proporzionale a  $l^{2-\bar{n}/\bar{s}}$  e poco dipendente da  $t$ , per  $t$  non troppo piccolo.

La  $\lambda_v(\Delta, t)$  che, tramite la  $\bar{s}$ , è funzione di  $\Delta$  e di  $t$  è stata riportata in grafico in fig. 3 in funzione di  $t$  per alcuni valori di  $\Delta$  (linee tratteggiate). Riportando i valori di  $t = T_v$  per cui si ha  $\lambda_v(\Delta, T_v) = 0$  in grafico in funzione di  $\log_{10} \Delta$ , si ottiene una retta (riportata sotto l'asse delle  $t$  in fig. 2).

Il massimo d'intensità verticale dovrebbe quindi avvenire, per densità ancora osservabili, a quota relativamente bassa.

Finora abbiamo ricavato i dati relativi alla sola intensità verticale; per ottenere i corrispondenti valori relativi all'intensità totale, che sono poi quelli che potranno essere confrontati coi dati sperimentali finora noti, adotteremo la formula (32); a tal fine è necessario calcolare la  $\bar{\theta}$  definita dalla (28). Ricordando la (23) e tenendo conto della (20) e della (22') si ottiene:

$$(35) \quad \frac{\partial \log h_\theta}{\partial \theta} = \frac{n}{\bar{s}} \left[ \lambda_1(\bar{s}) \frac{t \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \delta \operatorname{tg} \theta \right],$$

che, introdotta nella (28) dà:

$$(28') \quad \frac{n}{\bar{s}} \left( \frac{\lambda_1(\bar{s})t}{\cos \bar{\theta}} - \delta \right) \operatorname{tg} \bar{\theta} + \cotg \bar{\theta} + \frac{1}{\bar{\theta}} = 0;$$

in questa espressione  $\bar{s}$  va pensato come funzione di  $\Delta$  e di  $t$  e quindi la (28') si può considerare come espressione implicita della funzione  $\bar{\theta}(\Delta, t)$ . Per risolvere il problema praticamente conviene dividere la (28') per  $\operatorname{tg} \bar{\theta}$ ; ciò fatto si ottiene facilmente l'andamento di  $t/\cos \bar{\theta}$  e quindi di  $t$  in funzione di  $\bar{\theta}$  per vari valori di  $\bar{s}$ ; il legame noto tra  $\bar{s}$ ,  $\Delta$  e  $t$  permette quindi il calcolo grafico di  $\bar{\theta}$  come funzione di  $t$  per vari valori di  $\Delta$ . Abbiamo così ricavato i grafici di fig. 4, il valore di  $\delta$  non è critico per il calcolo di  $\bar{\theta}$  per non troppo piccoli valori di  $t$  ( $t > 10$ ); noi abbiamo posto  $\delta = 0,5$ .

Come si vede, e come è chiaramente comprensibile fisicamente,  $\bar{\theta} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$  e  $\bar{\theta} \rightarrow \pi/2$  per  $t \rightarrow 0$  (a rigore quest'ultimo limite si avrebbe solo per  $\delta = 0$ ; per  $\delta \neq 0$  il limite di  $\bar{\theta}$  per  $t \rightarrow 0$  è un poco minore di  $\pi/2$  perchè porre  $\delta \neq 0$  equivale a supporre che il dispositivo sperimentale sia poco efficiente per gli sciami molto inclinati).

I valori di  $\bar{\theta}$  introdotti nella (29) permettono di calcolare  $\bar{s}(\Delta, t)$  e quindi, mediante la (27) l'esponente  $\Gamma$  dello spettro di densità; abbiamo preso ancora  $\delta = 0,5$ ; e i valori ottenuti per  $\bar{s}$  sono stati ripartiti in grafico in fig. 2.

Il valore di  $\Gamma$  per alcuni valori di  $\Delta$  e di  $t$  è stato calcolato per via nume-



rica da COCCONI<sup>(15)</sup> partendo da ipotesi identiche a quelle da noi assunte; ponendo i valori di  $\Gamma$  del COCCONI nella (27) si ricavano dei valori di  $\bar{s}$  che sono in ottimo accordo con i nostri: lo scarto massimo è del 2% (i nostri valori di  $\bar{s}$  sono maggiori dei corrispondenti valori ricavati dai dati di COCCONI; lo scarto medio è circa dell'1-1,5%).

Abbiamo infine calcolato  $\lambda$ , il coefficiente d'assorbimento relativo all'intensità totale servendoci della (32); i valori ottenuti sono stati riportati in gra-

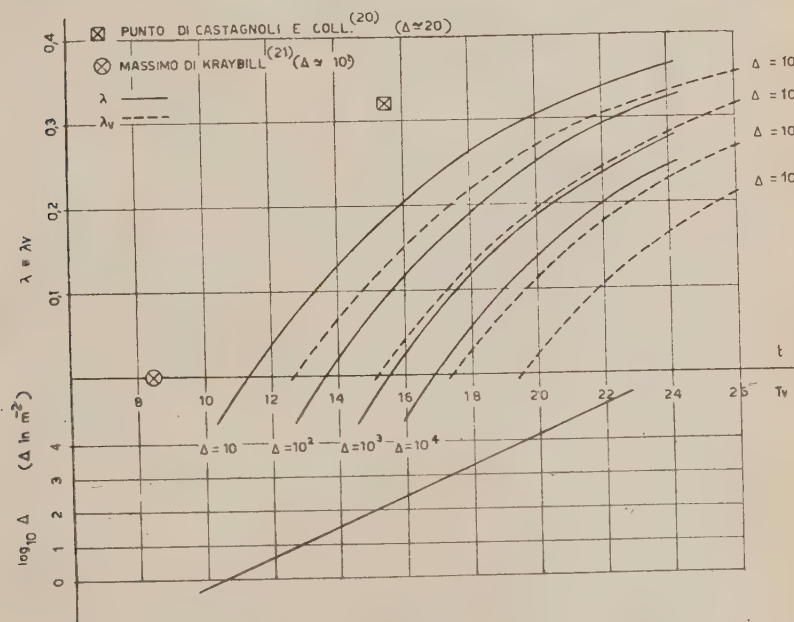


Fig. 3.

fico in fig. 3 (linee piene): come era da prevedersi i valori di  $\lambda$  sono tutti più alti dei corrispondenti valori di  $\lambda_v$ . Anche  $\lambda$  può essere controllata sui corrispondenti valori del coefficiente barometrico  $\beta$  legato a  $\lambda$  dalla nota relazione:

$$\beta = 0,315\lambda,$$

e calcolati per  $t = 24$ , numericamente da COCCONI<sup>(16)</sup> e analiticamente da JANOSSY<sup>(11)</sup>. I nostri valori sono in buon accordo coi corrispondenti valori di COCCONI. Il massimo scarto del 10% lo si ha per  $\Delta = 10$ . I nostri valori

<sup>(15)</sup> G. COCCONI e V. COCCONI-TONGIORGI: *Phys. Rev.*, **75**, 1058 (1949).

<sup>(16)</sup> G. COCCONI: *Phys. Rev.*, **72**, 964 (1947).

sono poi circa la metà di quelli riportati dal JANOSSY <sup>(11)</sup> e ricavati in modo piuttosto approssimato. I valori di  $\lambda$  calcolati dal LEWIS <sup>(12)</sup> per  $\Delta \leq 100$  sono in accordo coi nostri al livello del mare e lievemente maggiori dei nostri in quota; è da notare tuttavia che il LEWIS adotta per la  $\Pi(E, t)$  una espressione ridotta di quella già approssimata data da HEISENBERG <sup>(4)</sup>; d'altra parte potrebbe darsi che la diversità dei nostri risultati sia da ascrivere all'approssimazione usata nella deduzione della (20) come da noi già rilevato più sopra.

Le (19') o (21') permettono infine di studiare lo spettro zenitale teorico; ci asterremo dal farlo nel presente lavoro.

## 6. — Confronti con l'esperienza e discussione.

Come noto l'esperienza rivela che l'esponente  $\Gamma$  della (1) diminuisce <sup>(17)</sup> o quanto meno rimane approssimativamente <sup>(18)</sup> costante al diminuire di  $t$ , mentre al contrario calcoli come i nostri che partono dall'ipotesi dell'elettrone primario comporterebbero un aumento di  $\Gamma$  col diminuire di  $t$ ; nel nostro caso questa conclusione la si trae immediatamente ricordando la (27) e tenendo conto che, come si ha dai grafici di fig. 2,  $\bar{s}$  diminuisce al diminuire di  $t$  per qualsiasi valore di  $\Delta$ . Ora come è noto,  $s$  può considerarsi indice dell'età dello sciame medio registrato (avendosi  $\bar{s} = 1$  al massimo sviluppo). Cosicché il noto aumento di  $\Gamma$  con la quota significherebbe che man mano che si procede verso l'alto diminuisce l'età media degli sciami registrati. Tutto questo vale nell'ipotesi assunta che  $n$  sia indipendente da  $E$ ; in una teoria approfondita andrà tenuto conto delle possibili e probabili variazioni di  $n$  con  $E$  e quindi di  $n$  con  $\Delta$  e con  $t$  che, come mostra la (27), influiranno sulle variazioni di  $\Gamma$ . Osserviamo che  $\bar{s}$  dovrebbe potersi dedurre direttamente dall'esperienza, per es., dallo spettro energetico delle particelle dello sciame e quindi permettere di calcolare  $n$  noto  $\Gamma$ ; inoltre nell'ipotesi dell'elettrone primario  $\bar{s}$  dovrebbe esser legato in modo noto al rapporto elettroni-fotoni dello sciame.

Per quanto riguarda la dipendenza dell'esponente  $\Gamma$  dalla densità, dato che i valori da noi trovati concordano con quelli di COCCONI possiamo rimandare per la discussione ai noti lavori sull'argomento.

In quanto al coefficiente d'assorbimento esistono in merito numerosi dati sperimentali sia al livello del mare che in quota. A livello del mare tutti i dati sono più o meno in accordo con il  $\lambda$  teorico. In quota al contrario troviamo

<sup>(17)</sup> J. DAUDIN: *Journ. de Phys.*, **10**, 65 (1949).

<sup>(18)</sup> D. BROADBENT, E. W. KELLERMANN e U. A. HAKEEM: *Proc. Roy. Soc.*, **63**, 864 (1950).

i dati sperimentali in disaccordo con i nostri; per es. HILBERRY<sup>(19)</sup> trova  $\lambda = 0,3$  per  $\Delta \leq 100$  da  $t = 24$  a  $t = 14$ , mentre dalla fig. 3 risulta che il  $\lambda$  teorico per  $\Delta = 100$  dovrebbe partire dal valore 0,32 al livello del mare per decrescere costantemente fino ad annullarsi per  $t = 13,5$ . Anche il recente valore di  $\lambda$  di CASTAGNOLI e coll.<sup>(20)</sup> riportato in fig. 3 è circa doppio di quello previsto teoricamente. I dati sperimentali sembrano indicare che il disaccordo è più forte per gli alti valori di  $\Delta$ .

Come risulta dalla fig. 2 il massimo di intensità di sciami estesi dovrebbe.

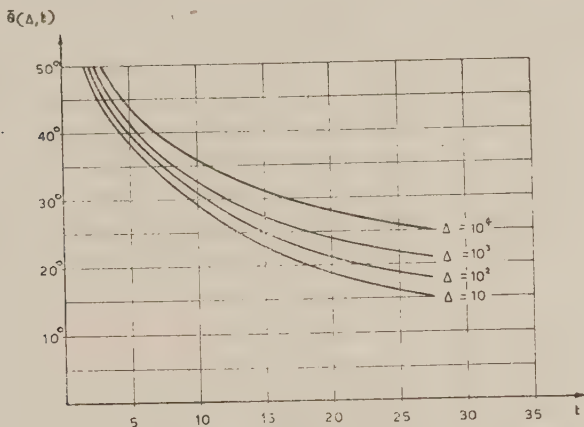


Fig. 4.

nelle nostre ipotesi, aversi a quota relativamente bassa tanto più quanto più grande è la densità. La sola esperienza recente ed attendibile su questo punto è quella di KRAYBILL<sup>(21)</sup>, il punto relativo è stato riportato sul grafico di fig. 2; il massimo di KRAYBILL è nettamente più alto di quello teorico. Per quanto riguarda la variazione dell'intensità con la quota LEWIS<sup>(10)</sup> perviene per  $\Delta \leq 100$  a risultati che sono qualitativamente in accordo con i nostri per quanto le discrepanze da lui trovate siano minori.

Si potrebbe obiettare che il disaccordo tra teoria ed esperienza è dovuto all'assunto valore di  $n = 1,8$ . Ora osserviamo che, come si può verificare facilmente, all'aumentare di  $\bar{n}$ ,  $I'$  aumenta lentamente; in altre parole, in base alla (27), aumenta anche  $\bar{s}$  ma più lentamente di  $\bar{n}$ . Ciò significa che nella (22') all'aumentare di  $n$  aumentano in valore assoluto ambedue i termini

<sup>(19)</sup> N. HILBERRY: *Phys. Rev.*, **60**, 1 (1941).

<sup>(20)</sup> C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 397 (1950).

<sup>(21)</sup> K. L. KRAYBILL: *Phys. Rev.*, **73**, 1092 (1949).

del secondo membro; e, siccome essi sono di segno opposto, l'effetto si compensa; in altre parole  $\lambda_e$  e  $\lambda$  sono poco sensibili alle variazioni di  $n$ ; fatto rilevato anche da COCCONI<sup>(19)</sup> col calcolo numerico. Per portare i valori teorici di  $\lambda$  a coincidere con i valori sperimentali in quota sarebbe necessario aumentare di molto  $n$ ; ciò avrebbe per conseguenza di far cessare gli accordi esistenti tra i valori sperimentali e teorici di  $\lambda$  e di  $\Gamma$  a bassa quota; inoltre recenti misure sullo spettro primario tendono ad indicare che il valore di  $n$  da noi assunto è semmai troppo alto, in tal caso il disaccordo tra teoria ed esperienza sarebbe ancor più netto e sparirebbe anche l'accordo esistente a bassa quota che sussiste appunto in virtù del valore scelto per  $n$ .

Se poi si volesse tener conto del fatto che gli sciami estesi sono quasi certamente di origine nucleonica e che quindi la (7) andrebbe moltiplicata per un fattore sorgente del tipo  $\exp[-\kappa t]$ , con  $\kappa$  dell'ordine del coefficiente d'assorbimento geometrico, e quindi opportunamente integrata rispetto alla quota (cfr. AMALDI e coll. (3)); il disaccordo risulterebbe ancora più drastico; la stessa cosa avverrebbe se si tenesse conto dei risultati dei calcoli di MOLIÈRE<sup>(22)</sup> il quale osserva che per render conto della nota curva di decorrenza degli sciami estesi con l'ipotesi dell'elettrone primario è necessario assumere che gli sciami abbiano inizio alla quota media  $t = 6$ .

## 7. - Conclusioni.

Da quanto esposto nei precedenti paragrafi risulta che l'ipotesi dell'elettrone primario se, con una apposita scelta dell'esponente  $n$  dello spettro primario, può trovarsi in accordo con alcuni dei dati sperimentali sugli sciami estesi a bassa quota è in disaccordo con altri; il disaccordo sembra essere tanto più importante quanto più grande è la densità degli sciami osservati e quanto più alta la quota di osservazione; questo fa supporre che i grandi sciami dell'aria si scostino dal modello fornito dalla teoria a cascata nell'ipotesi dell'elettrone primario, soprattutto nelle prime fasi del loro sviluppo cioè in alta quota e alle grandi energie.

Per chiarire questo importante punto sarebbe augurabile il poter avere ulteriori ed estese informazioni sperimentali sul comportamento degli sciami di grande densità in alta quota.

Ringrazio il prof. NICOLÒ DALLAPORTA per il suo interessamento a questo lavoro e il Sig. CLAUDIO VILLI per il gentile aiuto prestatomi nello svolgimento dei calcoli numerici.

Questo lavoro è stato eseguito con i fondi di una borsa di studio istituita dall'Unione Industriali di Como.

(22) G. MOLIÈRE: *Nuovo Cimento (Supplem.)*, **6**, 374 (1949).



## SUMMARY

Starting from the assumption, based upon experimental evidences, that the transversal structure of extensive showers be satisfactorily described by the MOLIÈRE distribution, and considering as unspecified within large limits the genetic model of the electromagnetic component, analytical expression for the characteristic parameters of the density spectrum (form. 1) are found (in particular for the  $I'$  exponent: form. 27 and the absorption coefficient form. 32).

Final formulae are specialized with reference to the hypothesis of the primary electron; it is found that although by the aid of a proper choice of the energetic spectrum of the primary radiation, it is possible to reach an agreement between theoretical previsions and experimental data at sea level, strong disagreement appears in height specially with reference to denser showers.

## Zur genäherten Berechnung der Eigenwerte einer Schrödinger-Gleichung.

H. J. MAEHLI

*Physikalisches Institut E.T.H. - Zürich*

(ricevuto il 12 Aprile 1951)

**Zusammenfassung.** — Zur Fehlerabschätzung bei der genäherten Berechnung von Eigenwerten der zeitunabhängigen Schrödingergleichung <sup>(1)</sup> wird ein neues Verfahren angegeben, das sowohl für diskrete Eigenwerte (Berechnung von Bindungsenergien) wie auch für das Kontinuum (Berechnung von Streuphasen) brauchbar ist.

Kann man eine Schrödinger-Gleichung

$$(1) \quad (H - E)\psi = 0,$$

( $H$  = Hamilton-Operator) nicht exakt lösen, so ist es doch stets möglich den ersten (tiefsten) Eigenwert  $E_1$  zu approximieren, indem man für  $\psi$  einen Ansatz der Form

$$(2) \quad \psi = \psi(c_1, c_2, \dots, c_n; q),$$

( $q$  = unabhängige Variable) macht und die Parameter  $c_m$  so bestimmt, daß

$$(3) \quad \bar{E}[\psi] = \frac{\int \psi^* H \psi \, dq}{\int \psi^* \psi \, dq},$$

minimal wird <sup>(1)</sup>. Dann ist bekanntlich immer

$$(4) \quad \bar{E}[\psi] \geq E_1.$$

---

<sup>(1)</sup> Vgl. z.B. L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948), S. 78 ff.

Wählt man insbesondere für  $\psi$  einen Ansatz der Form

$$(5) \quad \psi = \sum_{m=1}^n c_m \psi_m,$$

so sind die Extrema von  $E$ , die wir  $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_n$  nennen wollen, sämtlich obere Schranken für die entsprechenden Eigenwerte:

$$(6) \quad \bar{E}_m \geq E_m, \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

(Ritzsches Verfahren). Die Abschätzung des Fehlers  $\bar{E}_m - E_m$  ist äquivalent mit der Aufstellung *unterer Schranken* für die Eigenwerte, was in vielen Fällen mit Hilfe des folgenden neuen Verfahrens möglich sein wird: Es sei  $c_{m+1}$  eine untere Schranke für den  $(m+1)^{\text{ten}}$  Eigenwert, also

$$(7) \quad c_{m+1} \leq E_{m+1},$$

dann ist

$$(8) \quad e_m = \frac{c_{m+1} \int \psi^* H \psi \, dq - \int |H \psi|^2 \, dq}{c_{m+1} \int |\psi|^2 \, dq - \int \psi^* H \psi \, dq} \leq E_m,$$

vorausgesetzt, daß der Nenner positiv ist <sup>(2)</sup>.

Gibt es nur *einen* gebundenen Zustand, d.h. nur einen diskreten Eigenwert  $E_1$ , so kann man für  $c_2$  *einfach* die untere Grenze des Kontinuums einsetzen, also  $e_2 = 0$ , so daß

$$(9) \quad e_1 = \frac{\int |H \psi|^2 \, dq}{\int \psi^* H \psi \, dq} \leq E_1, \quad \text{wenn} \quad \int \psi^* H \psi \, dq < 0.$$

Gibt es aber z.B. zwei diskrete Eigenwerte von Gl. (1), so berechnet man zuerst  $e_2$  nach Gl. (9) und danach  $e_1$  aus Gl. (8), u.s.f..

Statt bei gegebenem Potential die Eigenwerte von  $E$  zu berechnen, kann man auch bei gegebenem  $E$  einen Parameter des Potentials bestimmen. Schreiben wir z.B. Gl. (1) in der Form:

$$(10) \quad [T - \beta U_0(q) - E] \psi = 0,$$

so ergibt sich bei gegebenem  $U_0(q)$  und  $E < 0$  eine unendliche Folge von Eigen-

<sup>(2)</sup> Für Beweis und Diskussion dieses Verfahrens vgl. die Dissertation des Verf. (E.T.H., Zürich, Diss. Nr. 1605), veröffentlicht in: *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaft.*, 24, 402 (1951) (erscheint demnächst).

werten  $\beta_1, \beta_2, \dots$  <sup>(3)</sup>, für welche *obere Schranken*  $B_1, B_2, \dots$  nach dem Ritzschen Verfahren (d.h. mit dem Ansatz (5)) aus

$$(11) \quad B(\psi) = \frac{\int \psi^*(E - T)\psi \, dq}{\int U_0 |\psi|^2 \, dq} = \text{Min.},$$

berechnet werden können. Für die Berechnung *unterer Schranken* beginnt man mit einer (rohen) Abschätzung z.B. des dritten Eigenwerts  $\beta_3$  und berechnet dann  $b_2$  und  $b_1$  als Maxima des Ausdrucks

$$(12) \quad b_m(\psi) = \frac{b_{m+1} \int \psi^*(E - T)\psi \, dq - \int U_0^{-1} |E\psi - T\psi|^2 \, dq}{b_{m+1} \int U_0 |\psi|^2 \, dq - \int \psi^*(E - T)\psi \, dq} < \beta_m,$$

mit der Nebenbedingung:  $b_m < b_{m+1}$  (vgl. Ref. 2). Auch für  $E > 0$  wird das  $\beta$ -Spektrum diskret, wenn wir die Streuphase festlegen <sup>(4)</sup>, doch reicht es nun in beiderseits unendlicher Folge von  $-\infty$  bis  $+\infty$ .  $B(\psi)$  wird zwar für alle  $\beta_m$  stationär, aber für keines minimal <sup>(5)</sup>. Obere Schranken kann man daher nicht mehr aus Gl. (11) berechnen, sondern aus der zu (12) analogen Ungleichung

$$(13) \quad B_m(\psi) = \frac{\int U_0^{-1} |E\psi - T\psi|^2 \, dq - B_{m-1} \int \psi^*(E - T)\psi \, dq}{\int \psi^*(E - T)\psi \, dq - B_{m-1} \int U_0 |\psi|^2 \, dq}$$

(wenn  $B_m(\psi) > B_{m-1}$ ), wobei man nun mit der Abschätzung eines kleineren, z.B. des größten negativen Eigenwerts beginnt. Das Verfahren zur Berechnung unterer Schranken bleibt dasselbe wie für  $E < 0$ .

Die Berechnung von Beispielen (Zweikörperproblem mit Yukawa-Potential) ist im Gange.

<sup>(3)</sup> Vgl. Ref. <sup>(1)</sup> sowie N. SVARTHOLM: *The Binding Energies of the Lightest Atomic Nuclei* (Diss. Lund 1945), p. 16.

<sup>(4)</sup> Vgl. verschiedene Arbeiten von L. HULTHÉN, die alle in *Arkiv för Mat., Astr. och Fysik*, 35A, No. 25 (1948), zitiert sind.

<sup>(5)</sup> Außer wenn das Potential außerhalb einer *endlichen* Reichweite *exakt* verschwindet (wie beim «Topfpotential»): Dann bricht die Folge der  $\beta_m$  nach unten ab, wie für  $E < 0$ .

#### RIASSUNTO (\*).

Per la stima degli errori nel calcolo approssimato degli autovalori dell'equazione di Schrödinger <sup>(1)</sup> indipendente dal tempo si indica un nuovo procedimento utilizzabile sia per autovalori discreti (calcolo di energia di legame) sia per il continuo (calcolo delle fasi di sparpagliamento).

(\*) Traduzione a cura della Redazione.



## Eccesso positivo dei mesoni a 2000 metri.

P. BASSI, I. FILOSOFO, C. MANDUCHI e L. PRINZI

*Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio degli ioni veloci del C.N.R. - Padova*

(ricevuto il 19 Aprile 1951)

**Riassunto.** — Si descrive una misura di eccesso positivo a 2000 metri effettuata deviando i mesoni dei due segni mediante un campo magnetico di 12300 gauss. I valori dell'eccesso trovati sono di  $0,18 \pm 0,05$  per pc compresi fra 4,5 e  $5,5 \cdot 10^8$  eV e  $0,38 \pm 0,06$  per pc compresi fra  $13,5$  e  $14,5 \cdot 10^8$  eV.

Diversi autori hanno eseguito misure del rapporto fra i numeri di mesoni positivi e negativi che giungono a varie profondità atmosferiche, collo scopo di studiare come essi siano prodotti dai nucleoni primari.

Alcune di codeste misure hanno carattere integrale <sup>(1)</sup>. Fra di esse c'è discreto accordo, nonostante le incertezze che sorgono, nel confronto dei risultati, dalla necessità di conoscere l'efficienza dei dispositivi per particelle di diversa energia da un lato e la forma dello spettro dei mesoni dall'altro lato. Quest'ultimo è noto con una certa sicurezza soltanto al livello del mare <sup>(2)</sup> ed a 4300 metri <sup>(3)</sup> mentre per le altre quote si devono usare spettri interpolati in base ad opportune ipotesi.

Altre esperienze hanno invece carattere differenziale. La maggior parte di esse sono state eseguite al livello del mare <sup>(4,5,6)</sup>, e indicano un eccesso di mesoni positivi rispetto ai negativi che cresce con l'energia fino a qualche GeV.

(1) G. BERNARDINI, M. CONVERSI, E. PANCINI, E. SCROCCO e G. C. WICK: *Phys. Rev.*, **68**, 109 (1945).

(2) J. G. WILSON: *Nature*, **158**, 414 (1946).

(3) D. B. HALL: *Phys. Rev.*, **66**, 321 (1944).

(4) J. G. WILSON: Congresso di Como e comunicazione privata.

(5) D. E. CARO, I. K. PARRY, e H. RATBERGER: *Nature*, **165**, 688 (1950).

(6) P. BASSI, E. CLEMENTEL, I. FILOSOFO e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **6**, 485 (1949).

per restare poi praticamente costante. Le rare misure a quota di montagna <sup>(7,8)</sup> indicano numeri uguali di mesoni dei due segni per basse energie ed un eccesso di positivi per energie più alte. Nel quadro d'una ricerca più vasta su questo argomento, abbiamo eseguito una serie di misure a 2000 m di altezza nell'osservatorio della Marmolada <sup>(9)</sup>, con una disposizione analoga a quella già adottata da due di noi in una ricerca precedente al livello del mare <sup>(6)</sup>.

## 1. — Dispositivo sperimentale.

Premettiamo una breve rassegna dei metodi generalmente adottati per le misure differenziali in questione.

Nella maggior parte di essi si ricorre ad un campo magnetico per la separazione delle particelle dei due segni, deducendo poi il momento da misure del raggio di curvatura della traiettoria nel campo stesso, oppure da misure successive di potere penetrante. Nel primo caso il dispositivo appare come un vero e proprio spettrografo magnetico, nel quale le traiettorie possono venire individuate per mezzo di una camera di Wilson o di un sandwich di lastre fotografiche o infine di un sistema di contatori: è allora possibile una misura assoluta del rapporto in questione. Nel secondo caso il dispositivo magnetico ammette particelle comprese in intervalli molto larghi d'energia, come quelli che conducono alle misure integrali: la risoluzione in intervalli più ristretti viene effettuata per mezzo di assorbitori e anticoincidenze. Lo « scattering » negli assorbitori e la non completa efficienza dell'anticoincidenza, rendono però incerta l'interpretazione dei risultati ottenuti con questo metodo.

Un altro principio che è stato pure applicato per la separazione dei due segni si fonda sulla diversa probabilità dei processi di decadimento e cattura dei mesoni positivi e negativi in materiali di diverso numero atomico. L'interpretazione delle osservazioni compiute per questa via presuppone però una conoscenza dello spettro degli elettroni di disintegrazione e delle relazioni range-momento per elettroni e mesoni: allo stato attuale il metodo non può fornire perciò che dei dati relativi.

Il nostro dispositivo deriva, come si è detto, da quello adottato nelle misure precedenti. Esso consiste in uno spettrografo magnetico di medio potere risolutivo, e ci è sembrato il più adatto allo scopo per la sua semplicità ed il buon rendimento.

Le sette coppie di contatori *AB* (fig. 1) in coincidenza doppia formano altrettanti telescopi che limitano le direzioni di arrivo dei raggi su cui si

---

<sup>(7)</sup> M. CONVERSI: *Phys. Rev.*, **79**, 749 (1950).

<sup>(8)</sup> R. BRODE: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **5**, 24 (1949).

<sup>(9)</sup> A. ROSTAGNI: *L'Energia Elettrica* (1951) in corso di stampa.

effettua la misura in un angolo solido abbastanza ristretto attorno alla verticale; la loro disposizione rispetto al campo magnetico è tale che le particelle di ugual momento sono focalizzate, qualunque sia la loro direzione entro l'angolo solido permesso.

I contatori *CD*, anch'essi in coincidenza doppia formano due telescopi inclinati simmetricamente rispetto alla verticale: una coincidenza *ABCD* segnala il passaggio di una particella deviata dal campo.

Consideriamo dapprima una particella di determinato segno la quale proceda in un piano perpendicolare al campo: la probabilità che essa dia una coincidenza quadrupla *ABCD* è funzione sia del momento che dell'angolo zenitale.

Questa probabilità è stata da noi determinata con un procedimento grafico per tutta una serie di valori dell'una e dell'altra variabile, postulando l'isotropia zenitale della radiazione incidente. Mediando rispetto all'angolo zenitale si è ricavata la curva di fig. 2 che esprime la probabilità in funzione del momento (riferita a un valore di  $H = 12300$  gauss), e che ci è servita direttamente all'interpretazione delle misure.

Data la piccola apertura del sistema la relazione effettiva fra probabilità di registrazione e momento non è molto diversa da quella disegnata, salvo un leggero slittamento verso momenti minori quando si considerino anche i raggi che non stanno in piani perpendicolari al campo.

Risulta (fig. 2) che il dispositivo è capace di registrare particelle che attraversano i telescopi *AB* con momenti compresi in una banda di circa  $10^8$  eV di larghezza a mezzo massimo, intorno a  $2 \cdot 10^8$  eV, col campo considerato di 12300 gauss.

Per le misure su particelle d'energia superiore si è ricorsi ad un assorbitore *T* posto al di sopra dell'intero apparecchio (si sarebbe potuto invece ruotare i telescopi *CD* verso il basso, ma sarebbe stato perciò necessario modificare ogni volta la geometria di tutto l'insieme per avere misure confrontabili fra loro). Le particelle che attraversano *T* subiscono uno « scattering » che si può calcolare con la formula di Williams: abbiamo trovato come unica conseguenza una nuova ma trascurabile correzione del grafico di fig. 2, legata a un leggero aumento dell'angolo d'ingresso consentito e ad un impoverimento,

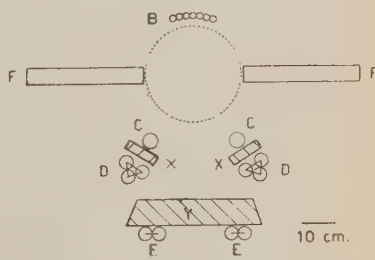
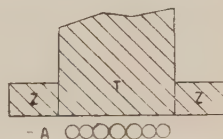


Fig. 1.

sulle basse energie, dello spettro che esce rispetto a quello che entra in  $T$ .

Si presenta ora il problema di separare le particelle di diversa specie le quali, avendo lo stesso momento, verrebbero registrate insieme. Mentre si possono facilmente escludere dai conteggi i protoni mettendo un assorbitore di Piombo di qualche mm fra i contatori  $C$  e  $D$  in  $X$ , rimane invece una certa trasparenza per gli elettroni, anche quando si aumenti lo spessore dell'assor-

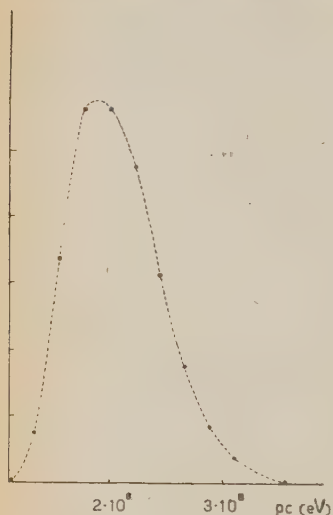


Fig. 2.

bitore al valore massimo ammissibile per i mesoni di pari momento. Occorre perciò che gli elettroni siano ridotti ad una piccola percentuale dei mesoni sin dall'ingresso, schermando il dispositivo con almeno 16 cm di Piombo: questo schermo determina naturalmente uno spostamento nella banda mesonica ammessa alla misura (da  $2$  a  $5 \cdot 10^8$  eV) e pone un limite inferiore alle energie dei mesoni che si possono studiare. Con gli opportuni assorbitori in  $X$  (nel nostro caso 4 cm equivalenti di Piombo) le coincidenze quaduple  $ABCD$  segnalano il passaggio di un mesone.

È risultato che la sorgente principale di coincidenze spurie risiede negli sciami. Abbiamo perciò aggiunto al dispositivo gli schermi di Piombo  $Z$  e i gruppi  $F$  di contatori in anticoincidenza, riducendo il fondo a  $1/5$  circa del valore di misura.

Contemporaneamente alla misura principale, a scopo di controllo, abbiamo determinate pure le coincidenze triple fra i telescopi  $AB$  e i contatori  $E$ . Tali coincidenze sono prodotte da particelle di momento compreso in una banda che ha la zona di maggiore probabilità fra  $2$  e  $12 \cdot 10^8$  eV con una coda che si estende fino a  $45 \cdot 10^8$  eV.

Gli 8 cm di Piombo posti in  $Y$  hanno lo scopo di separare i mesoni dai protoni e dagli elettroni (analogamente ai 4 cm posti in  $X$ ). Le riserve che si possono fare al riguardo sono discusse nel seguito.

Il campo era, come già detto, di 12300 gauss in un traferro di 12 cm: per compensare le inevitabili piccole asimmetrie geometriche abbiamo eseguito le misure alternando la direzione del campo e calcolando i rapporti fra mesoni positivi e negativi separatamente dalle due parti. I contatori di varia grandezza (fig. 1) erano tutti con pareti di 1 mm, all'infuori di quelli di anticoincidenza che erano di  $1/2$  mm; il riempimento era fatto con miscela di Trost. Gli impulsi, attraverso amplificatori a doppi triodi, pervenivano a un sistema



di coincidenze alla Rossi, di potere risolutivo  $8 \cdot 10^{-6}$  s, opportunamente combinate tra loro.

## 2. — Risultati.

Diamo in tab. I i risultati ottenuti: nelle varie colonne sono riportati rispettivamente: 1) gli intervalli di momento considerati; 2) i numeri di ore di conteggio; 3) i numeri complessivi di mesoni dei due segni, all'ora; 4) i valori dell'eccesso positivo; 5) i rapporti fra i mesoni dei due segni.

TABELLA I.

pc $10^8$ eV	$h$	$N_+ \quad N_-/h$	$2(N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$	$N_+/N_-$
4,5 — 5,5	642	2,41	$0,18 \pm 0,05$	1,20
13,5 — 14,5	612	1,60	$0,38 \pm 0,06$	1,48

Dalle misure di controllo a banda larga abbiamo dedotto fra 5,5 e  $15,5 \cdot 10^8$  eV un eccesso del  $0,26 \pm 0,03$ , e fra 14,5 e  $24,5 \cdot 10^8$  eV un eccesso del  $0,24 \pm 0,04$ . Gli errori segnati sono quelli statistici.

## 3. — Conclusioni.

Per discutere questi risultati ci riferiamo al meccanismo di produzione e di propagazione dei mesoni nell'atmosfera proposto nella nota precedente <sup>(9)</sup>: in essa, per spiegare la variazione dell'eccesso positivo coll'energia viene postulata l'esistenza di due sorgenti distinte, una con eccesso, localizzata nella zona del primo urto, l'altra, priva di eccesso, distribuita lungo l'atmosfera. Poichè al livello del mare e all'altezza delle montagne i mesoni poco energetici sono in massima d'origine locale, come è stato riconosciuto da vari autori <sup>(10)</sup>, essi non avrebbero eccesso positivo; al crescere dell'energia aumenta la probabilità che le particelle osservate provengano dagli strati più alti dell'atmosfera, cioè dai primi urti, e quindi l'eccesso cresce. Questo fino a  $20 \cdot 10^8$  eV; sopra questo valore il fenomeno non dipende più dalla competizione fra decadimento e generazione, ma essenzialmente dal modo come l'eccesso si distribuisce sullo spettro di generazione.

<sup>(10)</sup> M. SANDS: *Phys. Rev.*, **77**, 180 (1950).

L'aver trovato, per energie minori di  $20 \cdot 10^8$  eV, un eccesso positivo che cresce sia al livello del mare che a 2000 metri, conferma la descrizione fatta considerando le due sorgenti, e quindi l'ipotesi della produzione locale.

Dobbiamo tuttavia osservare che il valore di 0,38 trovato per energie intorno a  $14 \cdot 10^8$  eV scarta alquanto da quello che si potrebbe prevedere per la nostra quota in base ai dati disponibili al livello del mare ed a 3500 m, supponendo un andamento regolare. Il nostro risultato non è da ritenere ancora definitivo per la limitata precisione statistica. Volendolo considerare significativo se ne può ricercare una giustificazione nel fatto che la banda energetica esaminata è molto più stretta di quella usata nelle misure a 3500 m (\*).

Un esame più approfondito della questione sarà fatto in una successiva nota che comprenderà altre misure ora in corso.

I due valori dedotti dalle misure di controllo vanno corretti per il contributo degli elettroni di knock-on: questa correzione è però diversa nei due casi per la diversa percentuale degli elettroni rispetto ai mesoni delle due energie, ed è resa difficile dalla forma della banda energetica. Un calcolo grossolano porta ad una correzione che aumenta lievemente il primo eccesso ed in proporzione maggiore il secondo, avvicinando i risultati a quelli delle misure differenziali. I valori delle bande larghe possono comunque fornire un limite inferiore per l'eccesso nella zona esplorata.

Ci è grato ringraziare i proff. A. ROSTAGNI e G. PUPPI per l'interesse con cui hanno seguito l'esperienza, e l'ing. M. MAINARDIS, Direttore centrale della SADE, con i suoi collaboratori ing. B. CARUSO e sig. A. CARESTIATO per l'appoggio costante che ci ha consentito di superare le difficoltà di avviamento del laboratorio della Marmolada.

#### SUMMARY (\*).

The Authors discuss a measurement of positive excess at 2000 m a.s.l. effected deflecting the mesons of both signs through the action of a magnetic field of 12300 gauss. The figures found for the excess are  $0.18 \pm 0.05$  for pc between 4.5 and  $5.5 \cdot 10^8$  eV and  $0.38 \pm 0.06$  for pc between 13.5 and  $14.5 \cdot 10^8$  eV.

---

(\*) *Editor's care.*

## Oscillazioni esterne e calore specifico della calcite.

L. GIULOTTO e A. LOINGER

*Istituto di Fisica dell'Università - Pavia*

(ricevuto il 28 Aprile 1951)

**Riassunto** — Assumendo per l'energia potenziale relativa a deformazioni elastiche del reticolo della calcite una opportuna espressione suggerita da ragioni di simmetria, le dieci frequenze esterne ottiche principali risultano dipendenti da cinque costanti. Assumendo come dati quattro frequenze e il rapporto delle intensità delle due righe Raman esterne, si calcolano le rimanenti frequenze. Delle frequenze calcolate ci si serve poi per il calcolo del calore specifico.

1. — È noto che le oscillazioni di un cristallo costituito da ioni complessi, quale è la calcite, si sogliono ripartire in interne ed esterne; e queste seconde si possono a loro volta dividere in traslazionali e angolari.

Tale classificazione, se può rendere utili servizi all'intuizione, non corrisponde in generale in modo rigoroso alla realtà fisica, così che, volendo conservarla, bisogna ammettere la possibilità di accoppiamenti fra oscillazioni esterne angolari e di traslazione ed anche fra oscillazioni interne ed esterne.

Grazie a tali accoppiamenti il numero delle frequenze attive in Raman o in infrarosso può risultare superiore a quello prevedibile senza tener conto di essi.

Il problema degli accoppiamenti fra oscillazioni angolari e traslazionali è stato studiato finora in modo particolare pel reticolo della calcite. Con considerazioni sulla simmetria delle forze reticolari si sono potuti interpretare soddisfacentemente, per quanto riguarda il numero e lo stato di polarizzazione delle righe, gli spettri Raman e infrarosso di bassa frequenza di questo cristallo <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> L. GIULOTTO e G. OLIVELLI: *Nuovo Cimento*, 5, 52 (1948); *Journ. of chem. Phys.*, 16, 555 (1948).

<sup>(2)</sup> A. KASTLER: *Compt. Rend.*, 227, 1024 (1948); *Proc. Ind. Ac. Sci.*, 28, 349 (1948).

<sup>(3)</sup> J. LOUISFERT: *Compt. Rend.*, 230, 1154 (1950). Per una rassegna sull'argomento v. A. KASTLER: *Zeits. Elektroch.*, 54, 101 (1950).

È anche possibile, facendo alcune ipotesi semplificative, calcolare alcune frequenze esterne del reticolo assumendo come date altre frequenze. Tale questione è già stata affrontata in un lavoro precedente <sup>(1)</sup>, limitatamente però

a quattro frequenze del cristallo, delle quali due (oppure tre) venivano assunte dall'esperienza e due (una) venivano calcolate.

Nel presente lavoro il problema è impostato in modo alquanto più generale: il calcolo riguarda infatti tutte le frequenze esterne della calcite e tiene conto anche delle intensità delle righe Raman.

Delle frequenze ricavate ci si serve poi per calcolare il calore specifico in funzione della temperatura.

## 2. - Il reticolo della calcite è costituito da piani di Ca alternati a piani di $\text{CO}_3$ perpendicolari all'asse ottico del cristallo. La situazione di un $\text{CO}_3$ rispetto ai sei Ca più vicini è alternativam-

Fig. 1. - Situazione di un  $\text{CO}_3$  rispetto ai sei Ca più vicini. Il pieno, il tratteggio e il vuoto corrispondono a tre piani reticolari consecutivi.

te (a seconda cioè del piano cui appartiene il  $\text{CO}_3$ ) quella rappresentata in fig. 1, oppure quella che si otterrebbe ruotando il  $\text{CO}_3$  di  $180^\circ$ . La posizione dell'atomo di ossigeno  $\text{O}_1$  è riferita a tre assi cartesiani ortogonali coll'origine nella posizione di equilibrio; l'asse  $y$  è diretto secondo la congiungente  $\text{C}-\text{O}_1$ , l'asse  $z$  è parallelo all'asse ottico.

Le posizioni degli altri due ossigeni  $\text{O}_2$  e  $\text{O}_3$  sono riferite ad altri due sistemi di assi paralleli coll'origine nelle rispettive posizioni di equilibrio.

L'esistenza degli accoppiamenti si può riconoscere considerando la simmetria delle forze agenti fra lo ione  $\text{CO}_3$  e i sei ioni Ca più vicini. Così dalla fig. 1 risulta che una traslazione del  $\text{CO}_3$  normale o parallela all'asse ottico si accoppia con una rotazione attorno alla direzione della traslazione stessa. Infatti se  $y$  è per esempio la direzione della traslazione, la reazione elastica

<sup>(1)</sup> L. GIULOTTO e G. OLIVELLI: *Rend. Ist. Lomb.*, 82, 387 (1949).



su  $O_1$  sarà diretta secondo  $y$ , mentre invece quella su  $O_2$  e  $O_3$  avranno una componente parallela all'asse  $z$  e di senso opposto l'una rispetto all'altra. Analogamente, per una traslazione del  $CO_3$  parallela all'asse  $z$ , la reazione elastica su  $O$  avrà una componente perpendicolare alla congiungente  $C-O$ .

È poi facile rendersi conto che una traslazione in senso opposto dei due piani di  $Ca$  adiacenti ad un piano di  $CO_3$  deve essere accoppiata a una rotazione dei  $CO_3$  attorno a una direzione normale.

In fig. 2 è rappresentata la maglia elementare della calcite, che è costituita da quattro ioni, alternativamente  $Ca$  e  $CO_3$ , allineati lungo l'asse ottico. Si noti che due ioni consecutivi della maglia appartengono a piani reticolari non consecutivi: infatti fra i piani di questi ioni stanno un piano di  $Ca$  ed uno di  $CO_3$ .

Le oscillazioni principali dei rami ottici nel senso della teoria di Born e von Kármán sono date dalle oscillazioni fondamentali (o normali) della maglia elementare. Di tali oscillazioni, quelle esterne, prescindendo dagli accoppiamenti, sono rappresentate in fig. 3 <sup>(2)</sup> <sup>(5)</sup>; cinque di esse sono doppiamente degeneri.

La fig. 3 rappresenta anche contemporaneamente le oscillazioni disaccoppiate di quattro piani reticolari consecutivi; per cui, in base alle considerazioni precedenti, ci si può render ragione degli accoppiamenti esistenti fra le oscillazioni della maglia.

Gli accoppiamenti in questione possono aversi fra vibrazioni di traslazione ( $t$ ) e angolari ( $p$ ) aventi gli stessi caratteri di simmetria: così la  $E_g^{(p)}$  attiva in Raman si accoppia con la  $E_g^{(t)}$ , dando in tal modo origine alle due frequenze esterne attive in Raman della calcite; la  $A_{2u}^{(t)}$ , attiva in infrarosso, si accoppia colla  $A_{2u}^{(p)}$ , dando origine alle due frequenze esterne infrarosse polarizzate col vettore elettrico parallelo all'asse ottico; la  $E_u^{(p)}$  si accoppia da un lato colla  $E_{u(1)}^{(t)}$ , attiva in infrarosso, e dall'altro colla  $E_{u(2)}^{(t)}$ ; da questo accoppiamento triplo sorgono le tre frequenze esterne infrarosse polarizzate col vettore elettrico normale all'asse ottico. Le due oscil-

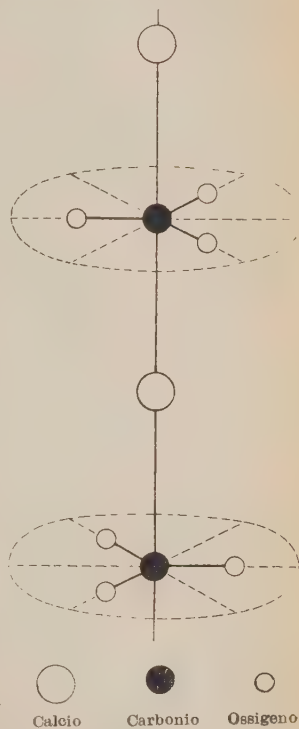


Fig. 2. — Maglia elementare della calcite.

<sup>(5)</sup> J. CABANNES: *Revue Scient.*, **80**, 407 (1942).

lazioni  $A_{2g}^{(t)}$  e  $A_{2g}^{(p)}$ , entrambe inattive, si accoppiano tra loro; la  $A_{1u}^{(t)}$ , essendo la sola del tipo  $A_{1u}$ , non può che rimanere disaccoppiata.

3. - Qualora si possa stabilire un'espressione dell'energia potenziale del reticolo in funzione delle deformazioni indicate in fig. 3, si può servirsene per ricavare,

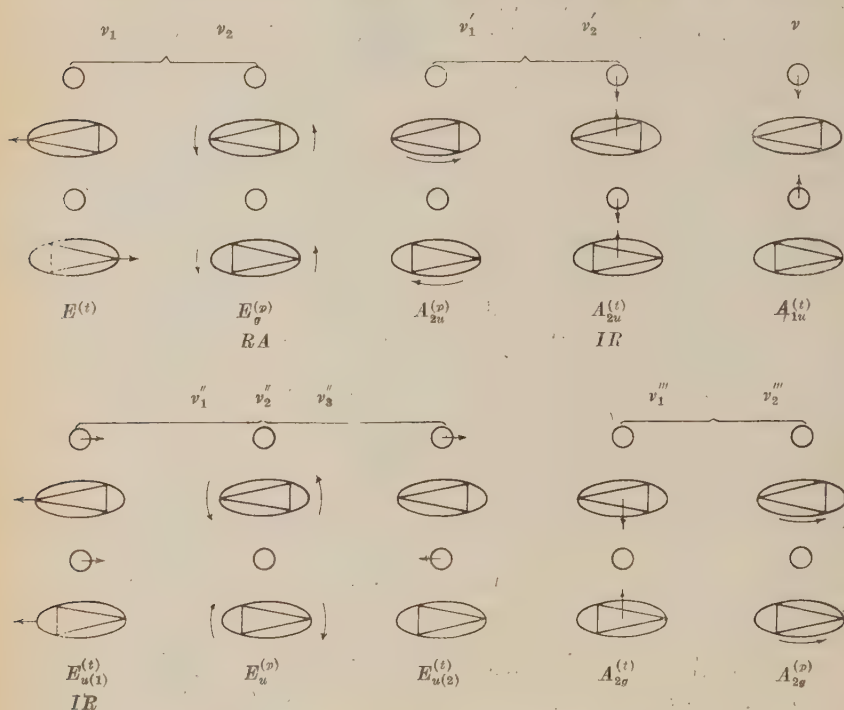


Fig. 3. - Oscillazioni normali esterne della maglia elementare della calcite. Le oscillazioni del tipo  $A$  sono simmetriche rispetto all'asse ottico, quelle del tipo  $E$  sono degeneri; l'indice  $g$  significa simmetria rispetto al  $Ca$ , l'indice  $u$  antisimmetria. I simboli sopra le graffe designano le frequenze effettive (cioè risultanti dagli accoppiamenti).

È poi indicata l'attività in Raman ( $RA$ ) e in infrarosso ( $IR$ ).

assunte come date alcune frequenze, le altre frequenze di vibrazione della maglia elementare.

Per evitare calcoli troppo laboriosi conviene considerare separatamente le energie potenziali  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  dei tre atomi di ossigeno  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  relative a moti rigidi del  $CO_3$ .

Per le oscillazioni nelle quali non viene deformato il reticolo dei  $Ca$ , l'ipotesi più generale che si può fare sulla relazione che lega la forza agente su un  $O$

al relativo spostamento rispetto al reticolo dei Ca, è che essa sia rappresentata da un tensore simmetrico. Tenendo conto solo delle forze esercitate sull'O dai due Ca più vicini, gli assi principali del tensore risulterebbero diretti, per evidenti ragioni di simmetria, secondo le due bisettrici dell'angolo CaOCa e secondo la normale al piano CaOCa. Una simile schematizzazione farebbe però prevedere un rapporto di intensità fra le due righe Raman notevolmente diverso da quello sperimentale.

Un'ipotesi più generale consiste nel supporre che un asse principale del tensore sia ancora diretto secondo C—O (che è asse binario di simmetria di tutto il reticolo) e nel fissare gli altri due a posteriori in modo da avere l'accordo coi dati sperimentali. Con tale procedimento si tiene conto, in qualche maniera, anche dell'azione degli atomi più lontani.

Assumeremo pertanto

$$U_1 = c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 z^2 + c_{13} xz ;$$

$U_2$  si otterrà da  $U_1$  ruotando gli assi di  $240^\circ$ :

$$U_2 = \frac{c_1 + 3c_2}{4} x^2 + \frac{3c_1 + c_2}{4} y^2 + c_3 z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} (c_1 - c_2) xy - \frac{1}{2} c_{13} xz + \frac{\sqrt{3}}{2} c_{13} yz ;$$

la considerazione di  $U_3$ , data la simmetria delle forze, è superflua.

Per la oscillazione  $E_{u(2)}^{(t)}$  e per le due ad essa accoppiate, che implicano una deformazione del reticolo dei Ca se si individua con una coordinata  $w$  lo spostamento relativo di due piani consecutivi del reticolo dei Ca parallelo alla direzione  $x$ , dovremo aggiungere all'energia potenziale  $U_2$  un termine del tipo  $c_{34} 2w$ .

Le equazioni del moto che tengono conto degli accoppiamenti si possono stabilire facilmente in base alle considerazioni fatte. Indicando per semplicità coi medesimi simboli che designano le oscillazioni disaccoppiate, delle opportune coordinate, il cui significato traspare dalle equazioni stesse, le dette equazioni sono:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} E_g^{(p)} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} E_g^{(t)} = m \ddot{E}_g^{(p)} , \\ -\left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) E_g^{(t)} - 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} E_g^{(p)} = m \ddot{E}_g^{(t)} , \\ -\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} A_{2u}^{(p)} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} A_{2u}^{(t)} = m \ddot{A}_{2u}^{(p)} , \\ -3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} A_{2u}^{(t)} - 3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} A_{2u}^{(p)} = \mu \ddot{A}_{2u}^{(t)} , \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & - \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) E_{u(1)}^{(t)} - 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} E_{u.}^{(p)} = \mu \ddot{E}_{u(1)}^{(t)}, \\
 & - \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} E_u^{(p)} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} E_{u(1)}^{(t)} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial z \partial w} E_{u(2)}^{(t)} = m \ddot{E}_u^{(p)}, \\
 & - \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) E_{u(2)}^{(t)} - 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial z \partial w} E_u^{(p)} = M' \ddot{E}_{u(2)}^{(t)}, \\
 & - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} A_{2g}^{(p)} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} A_{2g}^{(t)} = m \ddot{A}_{2g}^{(p)}, \\
 & - 3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} A_{2g}^{(t)} - 3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} A_{2g}^{(p)} = M \ddot{A}_{2g}^{(t)}, \\
 & - 3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} A_{1u}^{(t)} = M' \ddot{A}_{1u}^{(t)},
 \end{aligned} \right.$$

ove  $m$ ,  $M$ ,  $M'$ ,  $\mu$  sono rispettivamente le masse dell'ossigeno, dello ione  $\text{CO}_3$ , del Ca e la massa ridotta del sistema Ca— $\text{CO}_3$ .

Poniamo:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \Omega_1^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = \frac{2}{m} c_3; \quad \Omega_2^2 = \frac{1}{M} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) = \frac{3}{M} (c_1 + c_2), \\
 & \gamma_1 \Omega_1^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2m} c_{13}; \quad \gamma_2 \Omega_2^2 = \frac{2}{M} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = \frac{\sqrt{3}}{M} c_{13}, \\
 & \Omega_1'^2 = \frac{3}{\mu} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = \frac{6}{\mu} c_3; \quad \Omega_2'^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{2}{m} c_1, \\
 & \gamma_1' \Omega_1'^2 = \frac{3}{\mu} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} = \frac{3}{\mu} c_{13}; \quad \gamma_2' \Omega_2'^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} = \frac{1}{m} c_{13}, \\
 & \Omega_1''^2 = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) = \frac{3}{\mu} (c_1 + c_2); \\
 & \Omega_2''^2 = \frac{1}{M'} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) = \frac{3}{M'} (c_1 + c_2); \\
 & \Omega_3''^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = \frac{2}{m} c_3 = \Omega_1^2, \\
 & \gamma_{13}'' \Omega_1''^2 = \frac{2}{\mu} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = \frac{\sqrt{3}}{\mu} c_{13}; \quad \gamma_{23}'' \Omega_2''^2 = \frac{2}{M'} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z \partial w} = \frac{2}{M'} c_{34}, \\
 & \gamma_{31}'' \Omega_3''^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2m} c_{13}; \quad \gamma_{32}'' \Omega_3''^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z \partial w} = \frac{1}{m} c_{34},
 \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_1^{m_2} &= \frac{3}{M} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = \frac{6}{M} c_3; & \Omega_2^{m_2} &= \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{2}{m} c_1 = \Omega_2^2, \\ \gamma_1^{m_2} \Omega_1^{m_2} &= \frac{3}{M} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} = \frac{3}{M} c_{13}; & \gamma_2^{m_2} \Omega_2^{m_2} &= \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} = \frac{1}{m} c_{13}, \\ \Omega^2 &= \frac{3}{M'} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = \frac{6}{M'} c_3, \end{aligned} \right.$$

ove le  $\Omega$  e le  $\gamma$  sono rispettivamente le pulsazioni disaccoppiate e i coefficienti di accoppiamento.

Le pulsazioni effettive che seguono da tali equazioni <sup>(6)</sup> sono

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \pm \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\gamma_1\gamma_2\Omega_1^2\Omega_2^2}}{2},$$

relazioni analoghe si hanno per  $\omega_1'$ ,  $\omega_2'$  e  $\omega_1'''$ ,  $\omega_2'''$ ; mentre  $\omega_1^{*2}$ ,  $\omega_2^{*2}$ ,  $\omega_3^{*2}$  sono le radici della equazione cubica in  $\alpha$ :

$$\alpha^3 - (\Omega_1^{*2} + \Omega_2^{*2} + \Omega_3^{*2})\alpha^2 + (\Omega_1^{*2}\Omega_2^{*2} + \Omega_1^{*2}\Omega_3^{*2} + \Omega_2^{*2}\Omega_3^{*2} - \mathcal{A}_{13}^2 - \mathcal{A}_{23}^2)\alpha - \Omega_1^{*2}\Omega_2^{*2}\Omega_3^{*2} + \Omega_1^2\mathcal{A}_{23}^2 + \Omega_2^2\mathcal{A}_{13}^2 = 0,$$

con

$$\mathcal{A}_{13}^2 = \frac{\mu}{2m} (\gamma_{13}^{*2}\Omega_1^{*2})^2; \quad \mathcal{A}_{23}^2 = \frac{M'}{2m} (\gamma_{23}^{*2}\Omega_2^{*2})^2.$$

Un'ulteriore relazione tra le costanti delle forze e i dati sperimentali si può poi ottenere considerando il rapporto delle intensità delle due righe Raman: come è già stato ricavato in un calcolo preliminare <sup>(7)</sup> tale rapporto è

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\gamma_1\gamma_2\Omega_1^2\Omega_2^2\omega_2}{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)\omega_1} \left( \frac{\nu - \nu_1}{\nu - \nu_2} \right)^4 \frac{1 - \exp[-h\nu_2/kT]}{1 - \exp[-h\nu_1/kT]}.$$

Nel complesso le formule che forniscono le frequenze effettive unite a quella del rapporto delle intensità, costituiscono un sistema di undici equazioni nelle cinque costanti essenziali  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{34}$ ; per determinare queste occorrerà quindi assumere dall'esperienza cinque dati. Noi abbiamo scelto (e su tale scelta torneremo brevemente alla fine con la discussione dei risultati) i dati

<sup>(6)</sup> Esse si possono ottenere facilmente, anche nel caso dell'accoppiamento triplo, risolvendo l'equazione secolare che riduce l'hamiltoniana alla forma quadratica pura.

<sup>(7)</sup> A. LOINGER: *Nuovo Cimento*, 7, 939 (1950).

seguenti:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 282 \text{ cm}^{-1} \\ \nu_2 &= 155 \text{ } \\ I_1/I_2 &= 2,6 \quad (8) \\ \nu'_1 &= 106 \text{ cm}^{-1} \\ \nu''_2 &= 106 \text{ } \end{aligned}$$

Con essi si ricavano per i  $c_{ik}$  i valori:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1,144 \cdot 10^4 \text{ dine} \cdot \text{cm}^{-1}; & c_2 &= 2,535 \cdot 10^4; & c_3 &= 3,413 \cdot 10^4; \\ c_{13} &= 2,779 \cdot 10^4; & c_{34} &= 4,360 \cdot 10^4; \end{aligned}$$

e per le pulsazioni non accoppiate e i corrispondenti coefficienti di accoppiamento:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_1^2 = 2,568 \cdot 10^{27} \text{ (rad/s)}^2; & \Omega_2^2 = 1,107 \cdot 10^{27} \\ \gamma_1 \Omega_1^2 = 0,905 \cdot 10^{27} \text{ (rad/s)}^2; & \gamma_2 \Omega_2^2 = 0,483 \cdot 10^{27} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_1'^2 = 5,136 \cdot 10^{27}; & \Omega_2'^2 = 0,861 \cdot 10^{27} \\ \gamma_1' \Omega_1'^2 = 2,091 \cdot 10^{27}; & \gamma_2' \Omega_2'^2 = 1,046 \cdot 10^{27}; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{lll} \Omega_1''^2 = 2,768 \cdot 10^{27}; & \Omega_2''^2 = 1,661 \cdot 10^{27}; & \Omega_3''^2 = 2,568 \cdot 10^{27}; \\ \gamma_{13}'' \Omega_1''^2 = 1,207 \cdot 10^{27}; & \gamma_{23}'' \Omega_2''^2 = 1,312 \cdot 10^{27}; & \\ \gamma_{31}'' \Omega_3''^2 = 0,905 \cdot 10^{27}; & \gamma_{32}'' \Omega_3''^2 = 1,640 \cdot 10^{27}. & \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_1'''^2 = 2,055 \cdot 10^{27}; & \Omega_2'''^2 = 0,861 \cdot 10^{27}; \\ \gamma_1''' \Omega_1'''^2 = 0,836 \cdot 10^{27}; & \gamma_2''' \Omega_2'''^2 = 1,046 \cdot 10^{27}; \end{array} \right. \\ \Omega^2 = 3,082 \cdot 10^{27}. \end{aligned}$$

Le frequenze vere che ne conseguono sono riportate nella tabella seguente che raccoglie anche quelle sperimentali:

TABELLA I. — Frequenze esterne della calcite (in  $\text{cm}^{-1}$ ).

	Sperimentali	Calcolate		Sperimentali	Calcolate
$\nu_1$	282	(282)	$\nu_2''$	106	(106)
$\nu_2'$	155	(155)	$\nu_3''$	182 (?)	260
$\nu_1'$	357	(397)	$\nu_1'''$	—	269
$\nu_2''$	106	(106)	$\nu_2'''$	—	99
$\nu_1''$	330	344	$\nu$	—	295

(8) Il rapporto delle intensità delle due righe Raman è stato determinato dal dott. N. FORMIGONI, al quale esprimiamo il nostro ringraziamento.

4. — Se si vuole ora passare al calcolo del calore specifico, occorrerà prendere in considerazione l'intero spettro delle frequenze proprie del cristallo e non soltanto le frequenze fondamentali esterne della maglia elementare.

Riferendoci, come è d'uso, alla mole, il numero complessivo delle frequenze caratteristiche della calcite è evidentemente  $3 \cdot 5N = 15N$ ; di queste,  $9N$  sono esterne e  $(3 \cdot 4 - 6)N = 6N$  interne.

Un altro modo di suddividere le frequenze di vibrazione è, come è noto, quello di BOEN e VON KÁRMÁN: in ottiche e acustiche. Volendo mantenere anche la classificazione precedente di esterne e interne, si può dire che le  $12(N/2)$  oscillazioni interne si ripartiscono su 12 rami ottici interni, mentre delle  $9N$  esterne  $15(N/2)$  sono ottiche e  $3(N/2)$  acustiche. In totale si hanno così  $27(N/2)$  vibrazioni ottiche e  $3(N/2)$  vibrazioni acustiche.

Per non complicare in maniera eccessiva e d'altronde inutile il calcolo del calore specifico, faremo le due seguenti ipotesi semplificative:

a) Ogni ramo ottico contiene una banda di frequenze di ampiezza trascurabile.

b) Le onde termoelastiche appartenenti a rami acustici hanno una velocità di fase costante.

Tali ipotesi significano che al cristallo reale si è sostituito un solido isotropo ideale rappresentante una specie di media delle proprietà cristalline.

In particolare: l'ipotesi a) corrisponde abbastanza bene alla realtà fisica per quanto riguarda le vibrazioni interne; per quelle esterne rappresenta invece un'approssimazione piuttosto grossolana che risulta però in genere abbastanza corretta ai fini del calcolo del calore specifico; l'ipotesi b) significa che, per le onde acustiche, la frequenza è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda, ossia che per tali onde il cristallo è assimilato a un continuo e pertanto potremo ritenere che la funzione di distribuzione delle frequenze acustiche sia quella consueta di Jeans.

Il contributo al calore molare  $C_v$  dei 15 rami ottici esterni (ricordiamo che a causa della degenerazione solo 10 di essi sono distinti) è così:

$$k \frac{N}{2} \sum_1^{15} E(\vartheta_j/T) = \frac{R}{2} \sum_1^{15} E(\vartheta_j/T),$$

ove le  $E$  sono funzioni di Einstein del loro argomento e le  $\vartheta_j$  sono le temperature di Debye corrispondenti alle frequenze della tabella I:

$$\vartheta_j = h\nu_j/k = 1,432\nu_j \quad (\nu_j \text{ in cm}^{-1}).$$

Analogamente le frequenze (ottiche) interne contribuiscono con un termine del tipo  $k \frac{N}{2} \sum_1^{12} E(\vartheta'_j/T)$ ; in pratica però delle 12 frequenze principali della

maglia solo quattro sono distinte, cioè quelle distinte dello ione  $\text{CO}_3$  <sup>(5)</sup>:

$$\nu_1 = 1087 \text{ cm}^{-1}; \quad \nu_2 = 879; \quad \nu_3 = 714; \quad \nu_4 = 1432.$$

Pertanto il contributo al calore specifico si riduce a

$$R \{ E(\theta'_1/T) + E(\theta'_2/T) + 2E(\theta'_3/T) + 2E(\theta'_4/T) \}.$$

Il contributo delle onde acustiche a  $C_v$  sarà invece:

$$k \frac{N}{2} \{ D(\Theta_l/T) + 2D(\Theta_t/T) \},$$

ove le  $D$  sono funzioni di Debye e  $\Theta_l$ ,  $\Theta_t$  sono le temperature di Debye corrispondenti rispettivamente alla frequenza acustica longitudinale massima e alla frequenza acustica trasversale massima del cristallo « medio ». D'altra parte se si considera nel cristallo reale la direzione di propagazione parallela all'asse ottico, si possono ricavare valori approssimati delle  $\Theta_{l\parallel}$  e  $\Theta_{t\parallel}$  relative a quella direzione di propagazione. Fissata la direzione il problema si riduce infatti a quello di un reticolo unidimensionale; in tal caso, se non si avessero accoppiamenti fra oscillazioni di traslazione e oscillazioni torsionali, tra le frequenze acustiche massime rispettivamente longitudinale e trasversale e quelle ottiche  $\Omega_1''/2\pi$  e  $\Omega_2''/2\pi$  sussisterebbero, come è facile rendersi conto, le relazioni:

$$\left. \frac{\Omega_{l\parallel}^2}{\Omega_{t\parallel}^2} \right\} = \frac{\Omega_1''^2}{\Omega_2^2} \left\} \cdot \frac{1}{2M'} (M + M' - \sqrt{M^2 + M'^2});$$

dalle quali segue:

$$\nu_{l\parallel} \geq 142 \text{ cm}^{-1}, \quad \nu_{t\parallel} \geq 104 \text{ cm}^{-1}; \quad \Theta_{l\parallel} \geq 203, \quad \Theta_{t\parallel} \geq 149.$$

I moti di rotazione del  $\text{CO}_3$  possono influire solo sulla frequenza delle vibrazioni acustiche di piccola lunghezza d'onda. Tuttavia tale influenza risulta ovviamente trascurabile in pratica per quanto concerne il calcolo del calore specifico. Pertanto i limiti superiori delle frequenze acustiche per la direzione di propagazione parallela all'asse ottico possono ritenersi dati dai valori sopra scritti. Un'ulteriore semplificazione, anch'essa lecita ai fini del calcolo del calore specifico, consiste poi nell'identificare le  $\Theta_{l\parallel}$ ,  $\Theta_{t\parallel}$  con le  $\Theta_l$ ,  $\Theta_t$  del cristallo « medio ».

In fig. 4 è riportata la curva sperimentale del calore molare a pressione costante  $C_p$  della calcite (tratta dal LANDOLT-BÖRNSTEIN), e la curva del calore molare a volume costante  $C_v$  da noi calcolata. Il buon accordo delle due curve al disotto di  $\sim 150$  °K si spiega tenendo presente che la differenza  $C_p - C_v$  per tutti i cristalli è in generale trascurabile al disotto di una certa temperatura. La differenza fra i due calori specifici al disopra di  $\sim 150$  °K è del giusto ordine di grandezza. L'insufficienza dei dati sperimentali riguardanti i



coefficienti di dilatazione termica e di compressibilità della calcite non ha permesso di passare dal  $C_p$  al  $C_v$  e quindi di controllare in maniera più precisa l'esattezza della curva da noi calcolata.

Nella tabella II sono posti a confronto alcuni valori sperimentali di  $C_p$  con i corrispondenti di  $C_v$  da noi ottenuti.

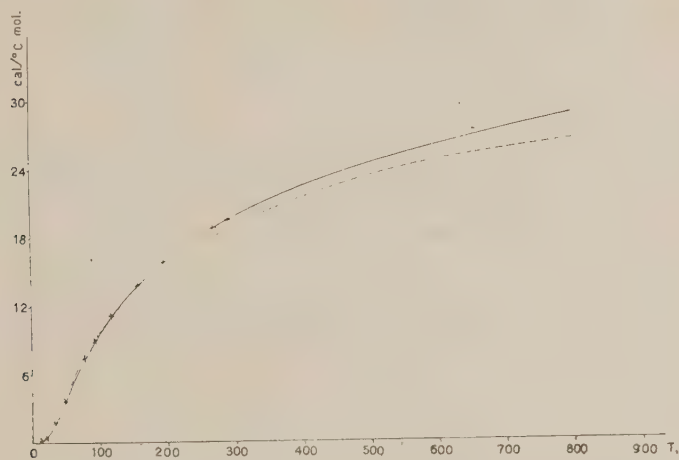


Fig. 4. - Calore molare della calcite in funzione della temperatura. La curva a tratto pieno è quella del calore molare a pressione costante  $C_p$  desunta dall'esperienza; la curva tratteggiata è quella calcolata del calore molare a volume costante  $C_v$ . I punti + sono punti sperimentali; da 300 °K in poi la curva  $C_p$  è ottenuta da una formula empirica.

TABELLA II. - Calore specifico della calcite a diverse temperature.

$T$	$C_p$ sper.	$C_v$ calc.	$T$	$C_p$ sper.	$C_v$ calc.
35	1,80	2,22	241,9	17,64	17,07
50	3,73	4,12	272,5	18,88	18,09
80	7,58	7,78	300	19,83	18,90
118,6	11,11	11,10	400	22,51	21,46
159,7	13,85	13,54	500	24,39	23,37
196,5	15,86	15,32	700	27,37	25,78

5. - Nel calcolo del n. 3 sono state assunte quattro particolari frequenze fra le sette frequenze esterne della calcite note dall'esperienza. Nessun criterio particolare ci ha guidato nella scelta all'infuori di quello di includere fra esse le

due frequenze attive in Raman, che presumibilmente sono conosciute con una precisione molto maggiore di quelle attive in infrarosso.

Delle rimanenti tre frequenze note dall'esperienza, due (e cioè quelle indicate con  $\nu'_1$  e  $\nu''_1$ ) sono in accordo abbastanza buono con quelle calcolate, mentre invece la terza ( $\nu''_3$ ) scarta notevolmente. I disaccordi potrebbero essere dovuti al fatto che i dati sulle frequenze infrarosse sono probabilmente poco precisi, risultando da vecchie misure eseguite da LIEBISCH e RUBENS<sup>(9)</sup> col metodo dei raggi restanti. In particolare il dato sperimentale riguardante la  $\nu''_3$  deve considerarsi molto impreciso, perchè il massimo corrispondente non risulta risolto nella curva del potere riflettente.

Il buon accordo fra la curva del calore specifico calcolato e quella dei valori sperimentali permette di concludere che le frequenze calcolate corrispondono bene « in media » a quelle reali. L'accordo sarebbe un po' meno buono, specialmente alle basse temperature, se si assumessero come dati solo frequenze infrarosse.

Ringraziamo vivamente il prof. A. KASTLER per una proficua discussione epistolare.

---

<sup>(9)</sup> TH. LIEBISCH e H. RUBENS: *Sitzungsber. Akad. Berlin*, **12**, 198 (1919). V. anche: CL. SCHAEFER e F. MATOSI: *Das ultrarote Spektrum* (Berlin, 1930), p. 356.

---

## SUMMARY

Calculations are reported, which permit to determine the ten external optical frequencies of the unit cell of calcite lattice. Assuming for the potential energy relative to elastic deformations an expression justified by reasons of symmetry, the external frequencies are depending on five constants. By the assumption as data of four frequencies and of the intensity ratio of the two external Raman lines, the remaining frequencies are calculated. In this way it is possible to determine the specific heat of calcite as a function of temperature; the agreement with experimental data is satisfactory.

## Ein neuer Apparat zum Absuchen und Ausmessen teilchenempfindlicher Platten.

O. KOLB

*Physikalisches Institut der Universität - Innsbruck*

(ricevuto il 2 Maggio 1951)

**Zusammenfassung.** — Es wird eine Apparatur zum Absuchen und Ausmessen teilchenempfindlicher Platten beschrieben. Sie besteht im Wesentlichen aus einem Mikroskop mit Spezial-Meßtisch, einer Lichtquelle und einem Antriebssystem. Der Antrieb des Meßtisches in einer Richtung, sowie die Tiefenverstellung kann von Hand oder durch einen Elektromotor vorgenommen werden, so daß ein sehr rasches Arbeiten möglich ist. Die Beobachtung geschieht entweder direkt durch einen Binokulartubus oder indirekt, indem das mit Hilfe eines Monokulartubus und total reflektierenden Prismas entworfene Projektionsbild betrachtet wird. Der Meßtisch gestattet eine genaue Fixierung der Platten und Ablesung der Koordinaten. Es kann so eine einmal entdeckte Bahn jederzeit durch Einstellen der aufgezeichneten Koordinaten wieder gefunden werden.

---

Das Absuchen und Ausmessen von Bahnen in Photoplatten erfordert bei Verwendung von gewöhnlichen Mikroskopen und Meßtischen viel Zeit und Mühe. Eine wesentliche Zeitersparnis und Erleichterung wird durch motorischen Antrieb des Meßtisches und Beobachtung eines Projektionsbildes erreicht, doch ist ein rascher Übergang auf Handbetrieb und direkte Beobachtung oft erwünscht. Daher wurde die hier beschriebene Apparatur nach diesen Gesichtspunkten aufgebaut.

Die Gesamtansicht der Apparatur zeigt Abb. 1.

Als Mikroskop findet ein Reichert-Binokular-Typ Verwendung. Die höchsten Forderungen an Genauigkeit werden an den Kreuztisch KT (siehe Abb. 1) gestellt. Er gestattet eine Fläche von maximal 9 mal 6,5 cm abzusuchen. Die Platten werden in den Rahmen eingelegt, an zwei Klemmleisten angedrückt und durch vier Klemmschrauben Kl fixiert. Die Fixierung ist so gut, daß bei gleicher Einspannung der Platte eine früher festgestellte Bahn durch Aufsuchen der zu ihr gehörigen Koordinaten sicher wieder gefunden werden kann.

Da die meisten Messungen mit starken Vergrößerungen durchgeführt werden müssen, um alle Einzelheiten feststellen zu können, muß der Seitentrieb sehr

fein verstellt werden können. Die Spindel hat eine Ganghöhe von  $1/2$  mm, die Meßskalen Msk sind in  $1/2$  mm, die Skalentrommeln Tr in 50 Teile geteilt. Die Verschiebung in der Längs- ( $x$ -Richtung) geschieht durch einen Elektromotor  $M_1$  mit angebaute Schneckenge triebe. Von der Schnecke erfolgt die Kraftübertragung durch zwei Zahnräder  $Z_2$ , wodurch eine nochmalige Umsetz ung von 1:5 erhalten wird. Die Geschwindigkeit des Motors läßt sich in einem Bereich von 1:11 regeln.

Der motorische Antrieb kann durch die Kupplung  $K$ , die die Antriebs-

Abb. 1.

welle mit der Spindel des Meßtisches verbindet, leicht unterbrochen und so die Seitenverstellung auch mit der Hand vorgenommen werden.

Für die Bewegung in der  $y$ -Richtung wurde kein motorischer Antrieb vorgesehen, da der Meßtisch nach Absuchen eines Streifens in der  $x$ -Richtung nur jeweils um die Gesichtsfeldbreite in dieser Richtung verschoben wird.

Um während der Bewegung in der  $x$ -Richtung auch den gesamten Tiefenbereich der Emulsion durchmustern zu können, wurde eine automatische Höhenverstellung des Mikroskoptubus vorgesehen. Der Motor  $M_2$  treibt ein Getriebe, das die Rotation des Motors in eine Hin- und Herbewegung verwandelt, so daß sich die Welle  $W$  um einen Winkel von ungefähr 50 Grad dreht. Diese Hin- und Herbewegung wird durch den Hebel  $H$  auf die Zahnstange  $Z$  übertragen, die dadurch eine Auf- und Abwärtsbewegung des Tubus bewirkt. Sie steht im Eingriff mit einem Zahnrad, das auf der Welle für die Tiefenverstellung des Mikroskops sitzt. Zur Einstellung verschiedener Tauch-



tiefen kann die Zahnstange  $Z$  in verschiedenen Abständen von der Antriebswelle auf dem geschlitzten Übertragungshebel  $H$  festgeklemt werden, wodurch der Hub der Zahnstange  $Z$  und dadurch die Tauchtiefe verändert wird. Will man die Tiefenverstellung von Hand betätigen, so wird die Zahnstange  $Z$  einfach aus dem Eingriff mit dem Zahnrad ausgerückt und mit einem Bolzen fixiert.

Abbildung 2 zeigt die Schaltskizze des elektrischen Teiles der Anlage. Der Stromkreis für den Antrieb der Spindel in der  $x$ -Richtung besteht aus dem Motor  $M_1$ , dem Widerstand  $R_1$ , den Schaltern  $S_2$ ,  $D_1$  und  $S_{12}$ .  $D_1$  ist ein Druckknopf, der es gestattet, den Motor auch für kleinste Bewegungen heranzuziehen, während  $S_{12}$  ein Fußschalter ist. Das Potentiometer  $R_1$  regelt den Rotorstromkreis. Der Stator liegt immer an der vollen Spannung. Um das Objektiv des Mikroskops vor Beschädigung durch den Meßtisch infolge Anschlag an den Rand zu schützen, wurde an beiden Enden des Meßtisches in der  $x$ -Richtung ein Stift angebracht. Dieser schließt zuerst den Kontakt  $S_5$ , bzw.  $S_6$ , je nach Bewegungsrichtung, wodurch das Lämpchen  $L_4$  aufleuchtet. Übersieht dies der Beobachter, so wird durch Schließung des Kontaktes  $S_7$  bzw.  $S_8$  der Motor  $M_1$  über das Relais ausgeschaltet. Zur Fortsetzung der Beobachtung ist der Kommutator  $S_3$  umzustellen und mit dem Druckknopf  $S_9$  der Relaisstromkreis so lange zu unterbrechen, bis die Anschlagstifte des Meßtisches die Kontakte  $S_7$  oder  $S_8$  freigeben.

Der Stromkreis für die Tiefenverstellung besteht aus dem Motor  $M_2$ , dem Widerstand  $R_3$ , den Schaltern  $S_{10}$ ,  $D_2$  und  $S_{12}$ . Der durch den Widerstand  $R_3$  erzielbare Regelbereich erstreckt sich von 36 Auf- und Abwärtsbewegungen in der Minute bei kleinster Geschwindigkeit bis 48 bei größter. Der Druckknopf  $D_2$  dient für kleinste Verschiebungen.  $S_{10}$  hat drei Stellungen mit folgender Bedeutung: Stellung 0:  $M_2$  ist ausgeschaltet, während alle anderen Teile der elektrischen Anlage ein- oder ausgeschaltet sein können. Stellung 1:

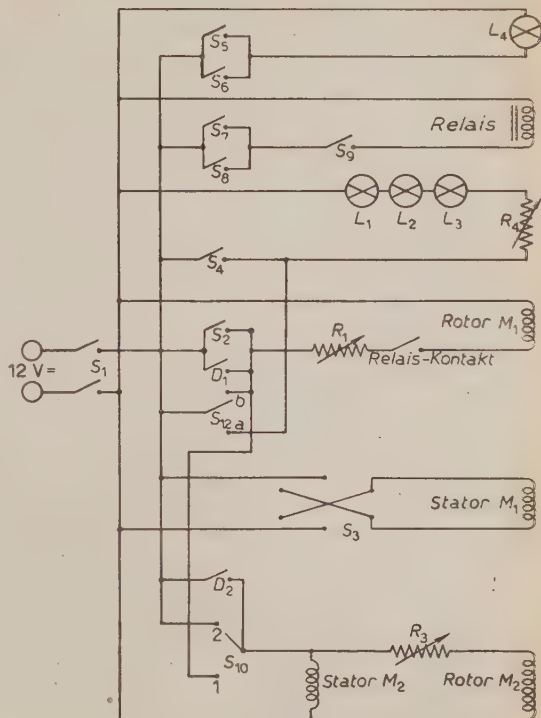


Abb. 2.

$M_2$  wird gleichzeitig mit  $M_1$  durch den Fußschalter  $S_{12}$  bedient. Stellung 2:  $M_2$  ist eingeschaltet, auch wenn durch  $S_{12}$   $M_1$  ausgeschaltet ist.

Die Lämpchen  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  beleuchten die Skalen des Kreutisches und die Schreibfläche. Schaltet man mit dem Fußschalter  $S_{12}$  die Motore  $M_1$  und  $M_2$  aus, so wird gleichzeitig die Skalenbeleuchtung eingeschaltet.

Da die Betrachtung eines Projektionsbildes weniger ermüdet, als subjektive mikroskopische Beobachtung, wurde die Apparatur auch für Mikroprojektion eingerichtet. Über ein aufsteckbares total reflektierendes Prisma ( $Pr$  in Abb. 1) wird auf den Schirm  $Sch$  ein Bild entworfen. Der Bilddurchmesser beträgt etwa 20 cm, der Schirm ist etwa 30 cm vom Beobachter entfernt. Um für jede gebräuchliche Linsenkombination ein Bild innerhalb der förderlichen Vergrößerung zu erhalten, wurde der Schirm auf einer Schiene verschiebbar montiert. Eine ausreichende Bildhelligkeit ließ sich durch Verwendung einer OSRAM-Speziallampe von 200 W erreichen.

Um Mikroaufnahmen machen zu können, ist die Anlage mit einem Mikrophotozusatzgerät ausgerüstet.

Da bei der hier beschriebenen Apparatur die Einstellung der Koordinaten auf 2 bis 3  $\mu$  genau möglich ist, wird eine beim Absuchen der Platte entdeckte Spur jederzeit durch Einstellen der aufgezeichneten Koordinaten wieder gefunden. Die Geschwindigkeitsgrenzen des Motors wurden so gewählt, daß einerseits auch bei stärkster Vergrößerung noch alle Einzelheiten des vorübergleitenden Bildes erkannt werden können, andererseits ein rasches Absuchen mit geringerer Vergrößerung möglich ist. Bei höchster Geschwindigkeit dauert das Überstreichen von 1 mm 10 Sekunden, bei geringster 110 Sekunden. Es zeigte sich, daß viele Platten mit ca. 600-facher Vergrößerung bei einer Geschwindigkeit von 1/2 mm pro 10 Sekunden abgesucht werden können, so daß für eine Fläche von 18 mm<sup>2</sup> höchstens 20 Minuten benötigt werden; da sich während des Vorbeigleitens der Platte die Tiefenverstellung stetig ändert, wird in dieser Zeit nicht nur die Oberfläche, sondern das ganze Volumen der Platte erfaßt, wenn sie nicht eine allzugroße Dicke aufweist.

Die Apparatur hat sich beim Durchmustern und Ausmessen von Platten bereits bestens bewährt.

#### RIASSUNTO (\*).

Si descrive un'apparecchiatura per l'esplorazione e la misurazione di lastre sensibili alle particelle. Consiste essenzialmente di un microscopio con tavolino speciale, una sorgente di luce e un aggregato motore. Il movimento del tavolino in un senso, come pure l'aggiustamento in profondità, può avvenire a mano oppure per mezzo di un motore elettrico, consentendo così un lavoro assai rapido. L'osservazione è possibile sia direttamente per mezzo di un tubo binoculare o indirettamente proiettando su uno schermo per mezzo di un prisma a riflessione totale l'immagine fornita da un tubo monoculare. Il tavolino consente un preciso fissaggio delle lastre e l'esatta lettura delle coordinate, cosicchè una volta individuata una traccia, la si può sempre facilmente ritrovare impostandone le coordinate sul tavolino.

(\*) Traduzione a cura della Redazione.

# LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

## Di alcune particolarità geometriche dello scattering classico di Rutherford.

L. CASTOLDI

*Istituto Matematico dell'Università - Genova*

(ricevuto il 2 Maggio 1951)

1. — Lo studio dello sparpagliamento di un fascio di particelle da parte di un campo coulombiano conduce, sia per via classica che attraverso la trattazione quantica, alla medesima celebre formula di RUTHERFORD <sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \sigma(\theta) = \frac{k^2}{4m^2v_0^4} \frac{1}{\sin^4 \theta/2},$$

dove è

- $m$  la massa di ciascuna delle particelle diffuse,
- $v_0$  la loro velocità asintotica,
- $\theta$  l'angolo di deviazione asintotica dalla direzione iniziale,
- $k^2$  una costante il cui valore risulta dalla definizione

$$U(r) = -\frac{1}{m} \frac{k}{r},$$

del potenziale coulombiano unitario,

- $\sigma(\theta)$  la sezione d'urto differenziale relativa all'angolo solido elementare attorno alla direzione  $[\theta, \varphi]$  (indipendente da  $\varphi$ ).

2. — Non è forse del tutto privo di interesse riconoscere talune più detta-

gliate proprietà del fascio delle traiettorie iperboliche delle particelle diffuse, quali risultano dalla trattazione classica (la sola per cui il problema, in quanto relativo alla nozione di traiettoria, ha significato).

Poichè i calcoli occorrenti allo scopo, benchè non immediati, sono di natura elementare, ci limitiamo a indicarne i risultati salienti, illustrati peraltro nella annessa figura.

Assunte coordinate polari con polo  $F$  nel centro del campo coulombiano repulsivo, e asse polare parallelo ed opposto alla velocità asintotica iniziale  $\bar{v}_0$ , l'equazione della generica traiettoria del fascio (ramo di iperbole non avvolgente  $F$ ) è:

$$(2) \quad r = \frac{p}{\varepsilon \cos(\theta - \varphi) - 1}.$$

Ivi il parametro  $p$ , l'eccentricità  $\varepsilon$  e la semiapertura  $\varphi$  dell'angolo degli asintoti racchiudente la traiettoria sono legati alla distanza  $\gamma$  di  $F$  dalla linea d'azione di  $\bar{v}_0$  dalle relazioni:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{mv_0^2}{k} \gamma,$$

$$(4) \quad \varepsilon = \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \frac{m^2 v_0^4}{k^2} \gamma^2},$$

$$(5) \quad p = \frac{mv_0^2}{k} \gamma^2.$$

<sup>(1)</sup> Si prescinde qui dalle correzioni derivanti dalla considerazione di effetti relativistici.

Per i semiasse  $a$  (focale) e  $b$  dell'iperbole cui appartiene la traiettoria in parola, si ha poi:

$$(6) \quad a = \frac{k}{mv_0^2}; \quad b = \gamma.$$

Le formule precedenti consentono una semplice costruzione del centro, del ver-

situata a distanza  $2a$  da  $F$ , dalla parte di provenienza delle particelle.

c) Il luogo dei vertici  $V$  è il ramo non cuspidato ( $v$ ) della concoide di base  $c$  con polo  $F$  e parametro  $a$ .

d) Le traiettorie del fascio inviluppano la parabola di fuoco  $F$  e parametro  $4a$ , con asse parallelo a  $\bar{v}_0$  e la

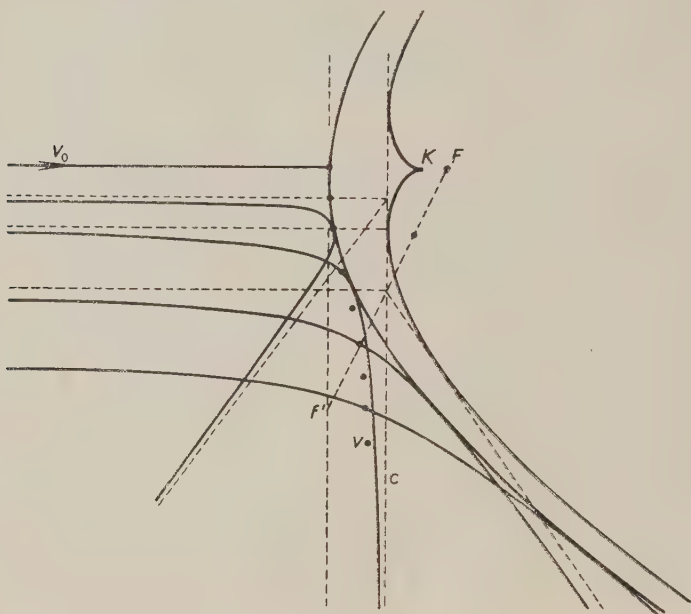


Fig. 1.

tice, e del fuoco (diverso da  $F'$ ) della generica traiettoria.

Risulta subito da (6) la invarianza del semiasse focale per tutte le traiettorie del fascio.

Inoltre:

a) Il luogo dei centri  $C$  delle iperboli cui appartengono le traiettorie è la retta  $c$  perpendicolare a  $\bar{v}_0$ , situata a distanza  $a$  da  $F$ , dalla parte di provenienza delle particelle.

b) Il luogo dei fuochi  $F'$  (diversi da  $F$ ) è la retta  $f'$  perpendicolare a  $\bar{v}_0$

convessità rivolta alle particelle incidenti, di equazione

$$(7) \quad r = \frac{4a}{1 + \cos \theta}.$$

e) Gli asintoti non paralleli a  $\bar{v}_0$  delle traiettorie del fascio inviluppano una quartica circolare, dotata di una cuspidine nel punto  $K \equiv (a/2, 0)$ , bitangente a  $c$  nei punti a distanza  $\pm a$  dall'asse polare ed avente, rispetto ad assi  $x, y$  con origine in  $K$  (il primo pa-



parallelo ed equiverso a  $\bar{v}_0$ ), l'equazione:

$$(8) \quad 4a^2y^2(x^2 + y^2) - \\ - 4a^3x(9y^2 + 8x^2) - 27a^4y^2 = 0.$$

Confrontando quest'ultima colla analoga equazione cartesiana

$$(6') \quad y^2 - 8ax - 12a^2 = 0$$

della parabola (6), si riconosce agevolmente che le due curve hanno ugual comportamento asintotico con differenza delle ordinate evanescente al divergere di  $x$ .

3. — Dal punto di vista fisico, giova rilevare le seguenti particolarità, implicite nei risultati enunciati:

a) L'esistenza di un'« ombra » (o « parabola di sicurezza ») del centro di sparpagliamento  $F$ , con sezione circolare normale a  $\bar{v}_0$  illimitatamente crescente al divergere di  $x$ .

b) L'assenza di focalizzazione delle linee d'azione delle velocità asintotiche delle particelle diffuse, anzi, l'esistenza di una « caustica per scattering » rappresentata da (8).

## Charge Fluctuations in Quantum Electrodynamics.

E. CORINALDESI

*The Physical Laboratories, University of Manchester*

(ricevuto il 6 Maggio 1951)

In a recent paper by BOHR and ROSENFELD <sup>(1)</sup>, reference is made to the evaluation of charge fluctuations in Quantum Electrodynamics. Let  $v$  be any space-time domain,  $\varrho(x)$  the operator of charge density of a matter field (hereinafter the abbreviations E.F., S.F. and V.F. will refer to the electron field, and to charged scalar and vector fields, respectively). The quantity of interest is

$$(1) \quad \langle Q^2 \rangle = \langle \iint_{vv} \varrho(x) \varrho(x') d^4x d^4x' \rangle,$$

where  $\langle \rangle$  denotes the vacuum expectation value. The evaluation of (1) for E.F. was carried out by HEISENBERG <sup>(2)</sup>, who found that  $\langle Q^2 \rangle$  diverges as long as  $v$  is sharply defined. However, convergence is secured if  $v$  is «smeared-out» on the boundary, say in a shell of width  $b$ . The way in which  $\langle Q^2 \rangle$  depends on  $b$  is of great interest. In Heisenberg's paper  $b$  was assumed to be larger than the Compton wave-length of the electron,  $1/m$  ( $\hbar = c = 1$ ). The opposite case was considered by JOST <sup>(3)</sup>, who proved that, for  $b \ll 1/m$ ,  $\langle Q^2 \rangle$  is proportional to  $\log b$ . In this letter we wish to present the extension of Jost's calculation to the case of S.F. and V.F., which was mentioned in a recent conference <sup>(4)</sup>.

In the following  $m$  and  $e$  will denote the mass and the charge of the particles of the specific matter field for which the quantity  $\langle Q^2 \rangle$  will have been calculated.

Following JOST, (1) can be written in the form

$$(2) \quad \langle Q^2 \rangle = \iint A_\mu(x) A_\nu(x') \langle j_\mu(x) j_\nu(x') \rangle d^4x d^4x',$$

where  $A_\mu(x) = (\delta_{\mu 0}; 0)$ , according as  $x$  is, or is not, contained in the domain  $v$ . Symmetrizing we obtain

$$(3) \quad \langle Q^2 \rangle = \Re \iint A_\mu(x) A_\nu(x') \langle P[j_\mu(x) j_\nu(x')] \rangle d^4x d^4x'.$$

<sup>(1)</sup> N. BOHR and L. ROSENFELD: *Phys. Rev.*, **78**, 794 (1950).

<sup>(2)</sup> W. HEISENBERG: *Leipziger Ber.*, **86**, 317 (1934).

<sup>(3)</sup> Unpublished: we are very grateful to Dr. R. JOST for kindly bringing to our knowledge his results.

<sup>(4)</sup> *Proceedings of the International Conference on Elementary Particles*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (14th-22nd December 1950), page 1 of the Preliminary Report.

Here

$$(4) \quad P[A(x)B(x')] = \frac{1}{2} \{ A(x), B(x') \} + \frac{1}{2} \varepsilon(x - x') [A(x), B(x')],$$

is a notation introduced by DYSON.

Denoting by  $K_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ) the vacuum polarization tensor, the relation

$$(5) \quad K_{\mu\nu}(x - x') = -i \langle P[j_\mu(x)j_\nu(x')] \rangle + \chi_{\mu\nu},$$

holds for E.F., S.F. and V.F. The quantity  $\chi_{\mu\nu}$  is always real, and vanishes for E.F. Therefore

$$(6) \quad \Re \langle P[j_\mu(x)j_\nu(x')] \rangle = -\Im K_{\mu\nu}(x - x').$$

Using a Fourier representation for  $K_{\mu\nu}$ , we obtain

$$(7) \quad \langle Q^2 \rangle = \iint A_\mu(x) A_\nu(x') d^4x d^4x' \cdot \frac{1}{2(2\pi)^8} \int (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \exp[i(k, x - x')] \Im f(k) d^4k.$$

The function  $f(k)$  will be specified by using the symbols  $f^{(e)}(k)$ ,  $f^{(s)}(k)$  and  $f^{(v)}(k)$ , referring to E.F., S.F. and V.F., respectively. The following expressions can be found in the literature <sup>(5)</sup>:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} f^{(e)}(k) &= 2ie^2 k^2 \int_{-1}^{+1} d^4p \int \frac{u^2 \left(1 - \frac{u^2}{3}\right) du}{\left[p^2 + m^2 + \frac{k^4}{4}(1 - u^2)\right]^3}, \\ f^{(s)}(k) &= \frac{ie^2 k^2}{3} \int_{-1}^{+1} d^4p \int \frac{u^4 du}{\left[p^2 + m^2 + \frac{k^4}{4}(1 - u^2)\right]^3}, \\ f^{(v)}(k) &= 3 \left(1 - \frac{k^2}{3m^2}\right) f^{(s)}(k). \end{aligned} \right.$$

The integration is to be carried out according to Feynman's prescription. This consists in replacing  $m$  by  $m - i\delta$  ( $\delta$  being real and positive), and in letting  $\delta$  vanish at the end. It is equivalent to prescribing a special path of integration in the complex  $u$ -plane. It is very easy to see that  $\Im f(k)$  is equal to zero for  $k^2 + 4m^2 > 0$ , and that for  $k^2 + 4m^2 < 0$  it is given by the following expressions:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Im f^{(e)}(k) &= \frac{(2\pi)^3 e^2}{2} \sqrt{\frac{k^2 + 4m^2}{k^2}} \left(1 - \frac{k^2 + 4m^2}{3k^2}\right), \\ \Im f^{(s)}(k) &= \frac{(2\pi)^3 e^2}{12} \left(\frac{k^2 + 4m^2}{k^2}\right)^{3/2}, \\ \Im f^{(v)}(k) &= \frac{(2\pi)^3 e^2}{4} \left(\frac{k^2 + 4m^2}{k^2}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{k^2}{3m^2}\right). \end{aligned} \right.$$

<sup>(5)</sup> R. JOST and J. RAYSKI: *Helv. Phys. Acta*, **22**, 455 (1949); H. UMEZAWA and R. KAWABE: *Prog. Theor. Phys.*, **4**, 369 (1949); D. FELDMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 1369 (1949); T. KINOSHITA: *Prog. Theor. Phys.*, **5**, 473 (1950).

It is clear that  $f^{(v)}(k)$  and  $f^{(s)}(k)$  have the same asymptotic behaviour for  $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ , while the term  $-k^2/3m^2$  in  $f^{(v)}(k)$  emphasizes the special features of the V.F. case. This, however, is not the only instance of the profound difference existing between the theory of particles with zero or  $1/2$  spin, and that of particles of spin 1. We would like to point out that  $\Im m f(k)$  can also be derived by direct calculation. This was done by JOST and LUTTINGER for E.F. (unpublished), and by the present author for S.F. and V.F. It is certainly superfluous to give details about this evaluation, which is rather straightforward.

The quantity  $\langle Q^2 \rangle$  must now be evaluated for a particular domain  $v$ : let this consist of a time interval  $-L_0 \leq x_0 \leq L_0$  and a sphere  $\tau$  of radius  $L$  in the ordinary space. As the Fourier representation of  $\langle Q^2 \rangle$  contains the form factor

$$(10) \quad \left| \int_v A_\mu(x) A_\nu(x') \exp[i(k, x - x')] d^4x d^4x' \right| = \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \left| \int_v \exp[i(k, x)] d^4x \right|^2,$$

the integrals

$$(11) \quad \left| \int_{-L_0}^{+L_0} \exp[-ik_0 x_0] dx_0 \right| = 2 \frac{\sin(k_0 L_0)}{k_0},$$

$$\left| \int_\tau g(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}, \mathbf{x})] d^3x \right| = \frac{4\pi}{|\mathbf{k}|^3} [\sin(|\mathbf{k}|L) - |\mathbf{k}|L \cos(|\mathbf{k}|L)].$$

will be needed. It can be proved that the introduction of a «smearing-out» can be effected by multiplying the two integrals (11) by the factors  $\exp[-b_0^2 k_0^2/2]$  and  $\exp[-b^2 \mathbf{k}^2/2]$ , respectively. The parameters  $b_0$  and  $b$ , therefore, will represent the smearing-out widths for space and time. We can now write

$$(12) \quad \langle Q^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^5} \int d^3k |\mathbf{k}|^2 |g(\mathbf{k})|^2 \exp[-b^2 \mathbf{k}^2] \int_{\sqrt{k^2+4m^2}}^{\infty} dk_0 \frac{\sin^2(k_0 L_0)}{k_0^2} F(k) \exp[-b_0^2 k_0^2],$$

where

$$(13) \quad F(k) = \frac{4}{(2\pi)^3} \Im m f(k).$$

The quantities  $F^{(v)}(k)$ ,  $F^{(s)}(k)$  and  $F^{(v)}(k)$  can be deduced very easily from (9). We notice that for  $b_0 = 0$  the integral over  $k_0$  is convergent for E.F. and S.F., but diverges badly for V.F. Thus in the two former cases we can assume the time interval to be sharply defined, and put  $b_0 = 0$ , while the latter case must be treated separately.

We shall consider only the following cases:

E.F. and S.F. ( $b_0 = 0$ ):  $b$  is supposed to be the smallest of the three quantities  $b$ ,  $L_0$  and  $1/m$ . It can be easily proved that, on this assumption,

$$(14) \quad \langle Q^2 \rangle \sim e^2 L^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5} (x \cos x - \sin x)^2 \exp[-b^2 x^2/L^2],$$

and therefore

$$(15) \quad \langle Q^2 \rangle \sim e^2 L^2 \log \frac{L}{b}.$$

V.F.: We assume  $0 < b_0 \ll 1/m$ , and  $b$  to be the smallest of the three quantities  $b$ ,  $L_0$  and  $1/m$ . It can then be proved that

$$(16) \quad \langle Q^2 \rangle \sim \frac{L^2 e^2}{m^2 b_0^2} \left( \frac{b_0}{b} \right)^\eta,$$

with  $\eta = 0, 1$ , according as  $b_0$  is larger or smaller than  $b$ .

Finally we want to point out that the above method could also be used for calculating the fluctuation of any component of the current.

The author would like to express his indebtedness to Prof. L. ROSENFELD, for suggesting this work and for his interest in its progress.



## Sulla magnetizzazione spontanea e il punto di Curie di lamine ferromagnetiche di piccolissimo spessore.

A. DRIGO

*Istituto di Fisica dell'Università - Ferrara*

(ricevuto il 17 Maggio 1951)

Il metodo delle onde di spin, inizialmente usato da BLOCH <sup>(1)</sup> per una estensione della teoria di Heisenberg sul ferromagnetismo, è stato recentemente applicato da KLEIN e SMITH <sup>(2)</sup> al calcolo delle proprietà magnetiche di sottili strati di materiali ferromagnetici. Conformemente a quanto era stato in precedenza previsto da ONSAGER <sup>(3)</sup> e da EKSTEIN <sup>(4)</sup>, KLEIN e SMITH trovano così che un reticolo a due dimensioni costituito da atomi di elementi ferromagnetici può presentare ancora una magnetizzazione spontanea, e che nel caso di lamine ferromagnetiche più grosse questa magnetizzazione e la sua temperatura critica (= punto di Curie) dipendono, almeno fino ad un certo spessore, dal numero di strati atomici che, sovrapposti, formano la lamina,

HERRING e KITTEL <sup>(5)</sup>, che da ultimo hanno analizzato l'effetto che può avere il campo magnetico e quello di anisotropia sulle onde di spin, concludono d'altra parte che un reticolo di atomi a due dimensioni può risultare ferromagnetico solo se, contemporaneamente alla

interazione di scambio, agiscono in esso le forze di anisotropia.

Indipendentemente dalla questione, del resto controversa <sup>(6)</sup>, se un reticolo piano possa essere o no ferromagnetico, resta di notevole interesse il fatto che la recente teoria di Klein e Smith prevede che le dimensioni del campione possono avere una certa influenza sulla magnetizzazione spontanea e sulla sua variazione termica, allo stesso modo come le teorie che tengono conto della struttura a domini <sup>(7)</sup> arrivano a prevedere una diversa dipendenza della magnetizzazione  $I$  dal campo  $H$  quando una almeno delle dimensioni del campione sia comparabile con le dimensioni dei domini.

Ricerche per stabilire l'influenza dello spessore sulla magnetizzazione spontanea di sottili lamine ferromagnetiche, a quanto mi consta, non ne sono mai state fatte: lo stesso dicasi per la dipendenza della magnetizzazione spontanea di queste lamine dalla temperatura. E poichè si tratta di questioni di notevole interesse anche dal punto di vista teorico, da qualche tempo ho iniziato delle ricerche su questo argomento.

Il dispositivo sperimentale usato è costituito essenzialmente da una sensi-

<sup>(1)</sup> F. BLOCH: *Zeits. Phys.*, **61**, 206 (1930).

<sup>(2)</sup> M. J. KLEIN e R. S. SMITH: *Phys. Rev.*, **81**, 378 (1951).

<sup>(3)</sup> L. ONSAGER: *Phys. Rev.*, **65**, 117 (1944).

<sup>(4)</sup> H. EKSTEIN: *Phys. Rev.*, **80**, 122 (1950).

<sup>(5)</sup> C. HERRING e C. KITTEL: *Phys. Rev.*, **81**, 369. (1951).

<sup>(6)</sup> P. WEISS: *Phys. Rev.*, **74**, 1493 (1948).

<sup>(7)</sup> C. KITTEL: *Phys. Rev.*, **70**, 965 (1946).

bilissima bilancia di torsione, nel vuoto. Essa si presta per ora solo alla misura della temperatura  $\Theta$  alla quale le sottili lamine di Fe, Co e Ni, depositate elettroliticamente su sottili supporti di rame purissimo<sup>(8)</sup>, cessano di essere ferromagnetiche. Nel seguito il dispositivo potrà essere adattato anche alla misura della

recentemente anche da altri<sup>(10)</sup>. Nei diagrammi e nella tabella questo spessore è stato espresso anche col numero di strati atomici che gli corrisponde.

Nella tabella sono riportati i risultati di queste misure preliminari di  $I_{\text{sat}}$  (in unità C.G.S.) e di  $\Theta$  (in °C). Si può così vedere che, passando da lamine

Ferro ( $I_{\text{sat}})_0 = 1740$ $T_c = 1043^\circ\text{K}$				Cobalto ( $I_{\text{sat}})_0 = 1430$ $T_c = 1393^\circ\text{K}$				Nichel ( $I_{\text{sat}})_0 = 510$ $T_c = 631^\circ\text{K}$			
spessore		Magnetizzazione di saturazione a $\sim 16^\circ\text{C}$ $I_{\text{sat}}$	Temperatura critica $\Theta^\circ\text{C}$	spessore		Magnetizzazione di saturazione a $\sim 16^\circ\text{C}$ $I_{\text{sat}}$	Temperatura critica $\Theta^\circ\text{C}$	spessore		Magnetizzazione di saturazione a $\sim 16^\circ\text{C}$ $I_{\text{sat}}$	Temperatura critica $\Theta^\circ\text{C}$
mm	strati atomici			mm	strati atomici			mm	strati atomici		
1580	5500	1710	775	1471	5850	1408	—	1480	4200	464	358
15,8	55	1600	607	29,4	116	1370	—	29,6	84	440	337
7,9	27	1525	487	7,3	29	1330	807	14,8	42	400	284
5,3	18	1300	328	3,7	15	1230	644	7,4	21	335	191
2,6	10	896	—	2,4	10	980	—	4,9	14	196	—

magnetizzazione spontanea a diverse temperature. Qualche dato sulla dipendenza della magnetizzazione spontanea dallo spessore ho potuto intanto ricavare, per la temperatura ambiente, da misure della magnetizzazione di saturazione  $I_{\text{sat}}$ , fatte col dispositivo usato in precedenza<sup>(8)</sup>.

L'area delle lamine usate era di qualche  $\text{cm}^2$ <sup>(9)</sup>; il loro spessore veniva desunto in base alla legge di Faraday, previa determinazione sperimentale del « rendimento » del processo d'elettrolisi, metodo che è stato riconosciuto valido

sufficientemente grosse (alcune migliaia di strati atomici) alle più sottili, la magnetizzazione di saturazione e la temperatura critica passano dai normali valori, caratteristici dei campioni grossi, a valori più bassi; esse diminuiscono inoltre tanto più rapidamente quanto più piccolo è il numero degli strati atomici.

Per confrontare questi risultati con la teoria essi sono stati trasformati in magnetizzazioni e temperature « ridotte », come si fa per la rappresentazione della legge degli stati magnetici corrispondenti. Per questo i valori di  $I_{\text{sat}}$  sono stati divisi per la magnetizzazione di saturazione  $(I_{\text{sat}})_0$  che si trova in campioni grossi, allo zero assoluto, e le temperature  $\Theta$ , tradotte in °K, sono state divise per la temperatura assoluta  $T_c$  che corrisponde al normale punto di Curie. I

<sup>(8)</sup> A. DRIGO e M. PIZZO: *Nuovo Cimento*, **5**, 196 (1948); **6**, 327 (1949).

<sup>(9)</sup> Va osservato che le lamine da me adoperate sono di lato alquanto più grande di quello per il quale KLEIN e SMITH hanno effettuato i calcoli: tuttavia si è ritenuto di poter per il momento astrarre da tale differenza, dato che  $M/M_0$  è funzione del logaritmo di questo lato.

<sup>(10)</sup> S. BASHKIN e G. GOLDBABER: *R. S. I.*, **22**, 112 (1951).

valori così ottenuti sono stati infine inseriti nel diagramma di fig. 1, accanto alle curve che, secondo la teoria di Klein e Smith, rappresentano la magnetizza-

indicato lo spessore, espresso in strati atomici.

Sulle ascisse invece sono stati indicati con frecce i valori delle temperature

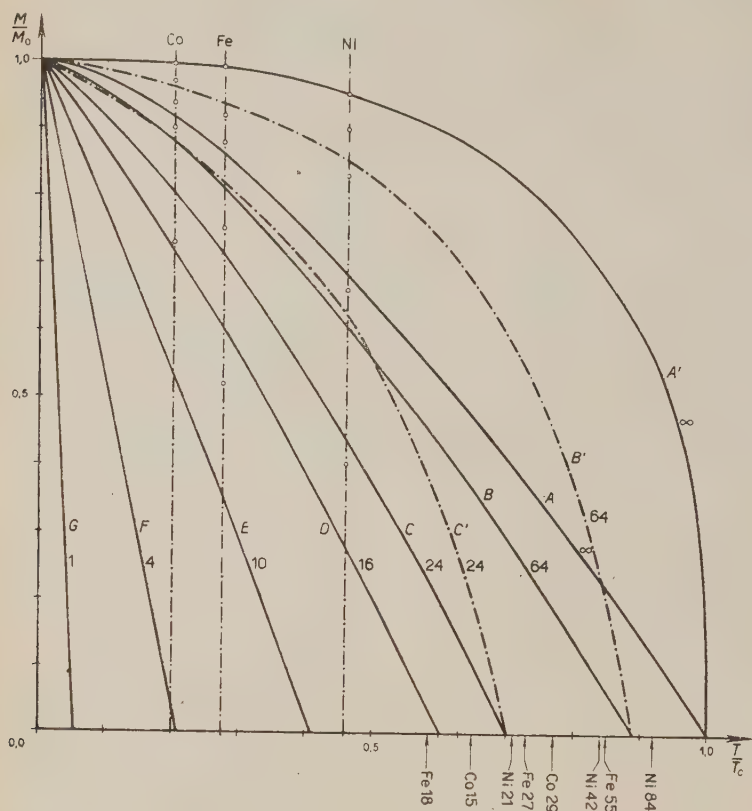


Fig. 1.

zione spontanea ridotta,  $M/M_0$ , in funzione della temperatura ridotta  $T/T_c$ : a parametro di queste curve è stato assunto il numero di strati atomici.

Sulle tre rette parallele all'asse delle ordinate che corrispondono alla temperatura ambiente alla quale sono stati sperimentati il Fe, il Co e il Ni sono allineati così i valori di  $I_{\text{sat}}/(I_{\text{sat}})_0$  trovati per le varie lamine di ciascuno dei tre metalli. Accanto ai vari punti è stato

di Curie ridotte,  $(\Theta + 273)/T_c$ , quali sono state trovate per le varie lamine: sigla e numero indicano anche qui il materiale e il numero di strati atomici di ogni campione.

Dalla fig. 1, e meglio ancora dalla fig. 2, che rappresenta la dipendenza di  $T/T_c$  dallo spessore, secondo la teoria di Klein e Smith, si può vedere come le temperature critiche trovate per le varie lamine siano abbastanza in accordo con

quelle calcolate. Viceversa dalla fig. 1 si vede che le magnetizzazioni risultano sistematicamente più elevate di quelle che la teoria stessa prevede per gli spessori considerati.

Questo ultimo fatto può tuttavia essere in relazione con la notevole differenza che intercorre tra la curva teorica ( $A$ ) per spessore infinito, quale risulta dai calcoli di KLEIN e SMITH secondo la teoria di Bloch, e la corrispondente curva sperimentale ( $A'$ ), che è stata tracciata nella stessa fig. 1 in base ai dati di WEISS e FORRER<sup>(11)</sup>: questa differenza fa prevedere che anche le curve a spessori inferiori debbano in realtà avere decorso diverso da quello calcolato da KLEIN e SMITH.

Un tentativo di correzione di tali curve tenendo conto di questa differenza tra la curva ( $A$ ) e la ( $A'$ ) è stato fatto calcolando i rapporti tra le ordinate delle curve ( $A$ ) e ( $A'$ ), e moltiplicando per questi le ordinate delle curve ( $B$ ), ( $C$ ), ( $D$ ), ecc.

Come si può vedere nella fig. 1,

<sup>(11)</sup> v. R. BECKER e W. DÖRING: *Ferromagnetismus* (Springer, Berlin, 1939). p. 26.

gli scarti dei valori sperimentali di  $I_{\text{sat}}/(I_{\text{sat}})_0$  rispetto alle curve ( $B'$ ), ( $C'$ ),

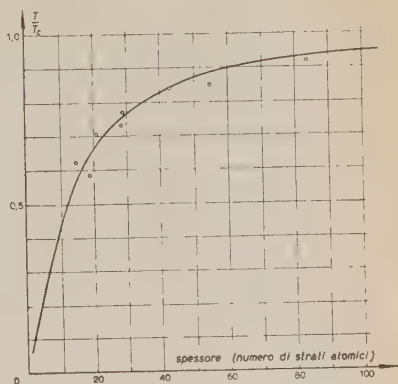


Fig. 2.

ecc., ottenute per questa via risultano effettivamente assai minori.

Le ricerche vengono ora continuate collo scopo di precisare questi primi risultati.

Mi è gradito ringraziare il prof. A. ROSTAGNI e il prof. E. CLEMENTEL per le utili discussioni di questi risultati.

## A proposito dei momenti magnetici dei nuclei speculari.

S. GALLONE e C. SALVETTI

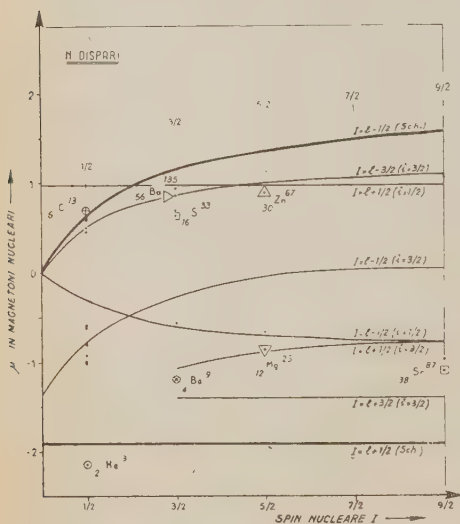
Istituto di Fisica dell'Università e Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 21 Maggio 1951)

Sono apparsi recentemente alcuni lavori <sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>, <sup>(3)</sup> sulle deviazioni dei valori sperimentali dei momenti magnetici nucleari dalle linee di Schmidt: tali deviazioni

mostrano l'incompletezza dei modelli puramente orbitali, che nei citati lavori si cerca di correggere introducendo un contributo al momento angolare totale dovuto ad una rotazione rigida del nocciolo nucleare costituito dai nucleoni appaiati. Ovviamente la rotazione del nocciolo porta ad una correzione del momento magnetico.

Nello spirito di queste considerazioni abbiamo studiato il comportamento magnetico di un modello costituito da un nocciolo dotato di un momento angolare  $k$  e rapporto giromagnetico  $G = Z/A$ , e da un nucleone dispari (non appaiato) di momento orbitale  $l$  e spin  $s$ . Si sono assunte come costanti del moto il momento orbitale  $l$ , il risultante  $i = k + s$  e, ovviamente, lo spin nucleare  $I = l + i$ .



I momenti magnetici sono dati da:

$$\mu = \frac{I(I+1) + i(i+1) - l(l+1)}{4(I+1)i(i+1)} \{ 2\mu_s - G[s(s+1) - k(k+1)] + (2\mu_s + G)i(i+1) \} + \\ + g \frac{I(I+1) + l(l+1) - i(i+1)}{2(I+1)}$$

<sup>(1)</sup> J. RAINWATER: *Phys. Rev.*, **79**, 432 (1950).

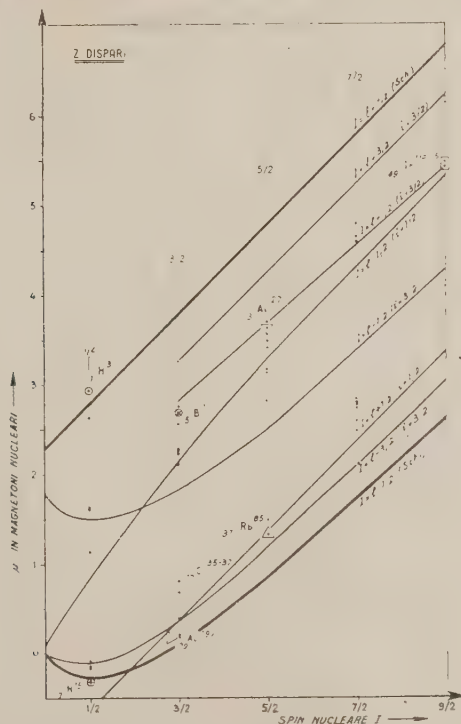
<sup>(2)</sup> L. L. FOLDY e MILFORD: *Phys. Rev.*, **80**, 751 (1950).

<sup>(3)</sup> A. BOH: *Phys. Rev.*, **81**, 134 (1951).



ove  $g$  e  $\mu_s$  sono rispettivamente il rapporto giromagnetico orbitale e il momento magnetico intrinseco del nucleone considerato.

Le figure mostrano l'andamento di  $\mu$  in funzione di  $I$  per  $k = 0$  ( $i = 1/2$ , linee di Schmidt) e  $k = 1$  ( $i = 1/2, i = 3/2$ ). Per ragioni di semplicità si è posto  $G = 1/2$ . Ogni linea è pertanto caratterizzata dal valore di  $k, i$  e  $l$ . Senza entrare in merito alla giustificazione del tipo di accoppiamento adottato è interessante osservare su



questo modello la corrispondenza tra momenti magnetici di nuclei speculari, cioè nuclei di  $A$  dispari e col medesimo spin, per i quali il numero dispari dei protoni dell'uno sia eguale al numero dispari dei neutroni dell'altro. Tali coppie hanno momenti magnetici che nei rispettivi diagrammi cadono in vicinanza di linee caratterizzate dai medesimi numerici quantici.

La corrispondenza fra i momenti magnetici di nuclei speculari si può ottenere in un modello puramente orbitale considerando lo stato di un nucleone non accoppiato di momento angolare totale  $j$  come sovrapposizione di stati di diverso  $l$ :  $l = j - 1/2$ ,  $l = j + 1/2$  (<sup>4</sup>). L'osservazione contenuta nell'ultima nota citata, che tale corrispondenza è largamente indipendente dal modello prescelto, purchè beninteso neutroni e protoni siano trattati in modo simmetrico, è confermata dai risultati testè riportati.

(<sup>4</sup>) A. L. SCHAWLOW e C. H. TOWNES: *Phys. Rev.*, **82**, 268 (1951).

## Stelle d'evaporazione generate in lamine metalliche.

R. LEVI SETTI

*Istituto di Fisica dell'Università di Pavia*

M. MERLIN

*Istituto di Fisica dell'Università, Centro per lo studio degli ioni veloci del C.N.R. - Padova*

(ricevuto il 23 Maggio 1951)

Nel quadro delle esperienze con lastre nucleari compiute alla Capanna Regina Margherita (4550 m s. l. m.) durante l'estate 1949 <sup>(1)</sup>, accanto alle lastre esposte sotto diversi spessori di Alluminio e Piombo per ricavarne dati sulla produzione di stelle nell'emulsione, altre lastre erano state esposte in sandwich, con sottili lamine metalliche tra le emulsioni, secondo il metodo proposto da BATES e OCCHIALINI <sup>(2)</sup>, allo scopo di studiarvi la produzione di stelle nei metalli in questione. Furono impiegate lamine di Pb, Au, Cu, Al, in spessori variabili fra 0,03 e 0,1 mm, con lastre Ilford G 5 di  $5 \times 10$  cm<sup>2</sup>, emulsioni di 200 e di 600  $\mu$ .

L'esperienza mirava a determinare l'andamento delle sezioni d'urto per generazione di stelle in elementi di diverso numero atomico. La conoscenza di tale andamento, sia per lo studio delle interazioni di alta energia che per i fenomeni evaporativi, presenta infatti un grande interesse; d'altra parte le indicazioni che si possono trarre al riguardo dall'esame

delle stelle generate in emulsione sono in genere limitate ed incerte. Un primo tentativo di ricavare un'indicazione più sicura era stato compiuto da HARDING <sup>(3)</sup>, coll'artificio di suddividere l'emulsione in strati alternati con strati di gelatina pura, in modo da poter studiare separatamente le stelle prodotte in gelatina. Successivamente BARBOUR e GREENE <sup>(4)</sup> pubblicarono dati relativi alla generazione di stelle in lamine metalliche poste tra due lastre nucleari ed esposte a 30 000 m di quota. Infine HODGSON <sup>(5)</sup> studiò stelle generate a 3 600 m in una lastra di Pb appoggiata all'emulsione.

Delle nostre lastre è stato esplorato sinora un primo gruppo, con emulsione di 200  $\mu$  e lamine di Al (spessore 37  $\mu$ ), Cu (52  $\mu$ ), e Au (30  $\mu$ ), per un'area complessiva di  $2 \times 162$  cm<sup>2</sup>. Le lamine erano rivestite da uno strato di alcuni micron di vernice, ad evitare azioni chimiche tra metallo ed emulsione. La non perfetta aderenza fra la lamina e l'emulsione lasciava inoltre sussistere uno strato d'aria valutato, da misure eseguite su tracce rettilinee che attraversano le due emulsioni, a 60-70  $\mu$  su ciascuna faccia. Allo

<sup>(1)</sup> L. MALASPINA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **7**, 145 (1950); G. BELLIBONI, L. FABBRICHESI, L. DE MARCO e M. MERLIN: *Nuovo Cimento*, **8**, 374 (1951).

<sup>(2)</sup> W. J. BATES e G. P. S. OCCHIALINI: *Nature* **161**, 473 (1948).

<sup>(3)</sup> J. B. HARDING: *Nature*, **163**, 440 (1949).

<sup>(4)</sup> I. BARBOUR e L. GREENE: *Phys. Rev.*, **79**, 406 (1950).

<sup>(5)</sup> P. E. HODGSON: *Phil. Mag.*, **42**, 82 (1951).

scopo di facilitare l'esatta sovrapposizione delle due lastre di un sandwich dopo lo sviluppo, ciascuno di essi fu segnato in più punti con crocette di raggi X.

Ricomposto il sandwich, l'osserva-

sia perchè di range insufficiente per raggiungere l'emulsione, sia per il fattore di perdita geometrica sopra accennato. Alla prima causa d'errore si potrebbe apportare una correzione per l'oro, poichè

TABELLA I. — Numero di stelle  $S'_n$  con almeno  $n$  rami.

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Au	134	113	75	36	27	15	12	10	8	8	7	3
Cu	116	66	34	16	6	1	1	—	—	—	—	—
Al	35	23	9	4	2	1	—	—	—	—	—	—

zione microscopica porta ad individuare i gruppi di tracce che concorrono in un medesimo punto situato fra le due emulsioni, e questi si considerano come stelle, con alcune avvertenze. Sono state prese in considerazione, in questa prima fase d'esplorazione, soltanto tracce ad elevata densità di grani, presumibilmente originate da fenomeni evaporativi. Sono stati scartati i gruppi di due rami e quelli di 4 rami a due a due allineati, in quanto, questi ultimi, potevano corrispondere ad un incrocio casuale di due tracce passanti attraverso le due emulsioni. Si aggiunga infine che i rami di una stella emergenti in emulsione ad una distanza superiore al diametro del campo del microscopio (0,7-0,8 mm), sfuggono generalmente all'osservazione (perdita geometrica). Queste limitazioni portano alla perdita di un numero notevole di stelle di 3 o 4 rami, mentre è meno probabile la perdita di stelle più grandi, se pure di queste potrà sfuggire qualche ramo.

I dati ottenuti sono riassunti nella tabella I.

I valori indicati vanno corretti in quanto un certo numero di rami si perde

per esso, in base al modello evaporativo, si può presumere l'andamento dello spettro di energia delle particelle emesse: non altrettanto si può dire per gli elementi leggeri, per i quali la teoria evaporativa è dubbia e allo stato attuale non si saprebbe formulare alcuna ipotesi attendibile sullo spettro di particelle (protoni e  $\alpha$ ) da essi emesse. Per questa ragione si è creduto opportuno rinunciare a tale correzione per tutti e tre gli elementi e ci si è accontentati di valutare il fattore di perdita geometrica che, nelle nostre condizioni sperimentali, ammonta a circa il 27%.

Indicando con  $S'_n$  il numero di stelle osservato e con  $S_n$  il numero di stelle generate effettivamente nel metallo con  $n$  e più rami, sussiste fra  $S'_n$  ed  $S_n$  la relazione approssimata:

$$S'_n = S_n + 0,27 S_{n+1} - 0,27 S_n,$$

che si risolve successivamente per ogni  $n$  partendo dall'ammissione che per  $n$  grande sia  $S'_n = S_n$ .

Si sono così ottenuti i numeri di stelle corretti (valori assoluti e norma-

lizzati a 100 per  $n = 4$ ) che sono riportati nella tabella II.

eventi in media molto più energici, data l'esposizione ad alta quota.

TABELLA II. — Numero di stelle  $S_n$  con almeno  $n$  rami.

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
VALORI ASSOLUTI												
Au	138	122	89	38	31	16	12	11	8	8	7	3
Cu	130	76	40	19	8	1	1	—	—	—	—	—
Al	38	27,5	14	4,6	2,3	1	—	—	—	—	—	—
VALORI NORMALIZZATI												
Au	$113 \pm 10$	$100 \pm 9$	$73 \pm 7,7$	$31,2 \pm 5,2$	$25,4 \pm 4,5$	$13,1 \pm 3,3$	$9,8 \pm 2,9$	$9 \pm 2,7$	$6,5 \pm 2,3$	$6,5 \pm 2,3$	$5,7 \pm 2,1$	$2,5 \pm 1,4$
Cu	$171 \pm 15$	$100 \pm 11$	$52,7 \pm 8,3$	$25 \pm 6$	$10,5 \pm 3,7$	$1,3 \pm 1,3$	$1,3 \pm 1,3$	—	—	—	—	—
Al	$138 \pm 23$	$100 \pm 19$	$40 \pm 12$	$16,7 \pm 8$	$8,3 \pm 5,4$	$3,6 \pm 3,6$	—	—	—	—	—	—

Come si vede la correzione è maggiore per il Cu, per il quale si sono riscontrate più stelle a tre rami che per gli altri elementi. La ragione di tale divergenza, specie nei riguardi dell'Al, non risulta allo stato attuale molto chiara.

In base ai precedenti dati sono state tracciate le curve integrali che danno il numero di stelle in funzione del numero di rami (fig. 1). La pendenza della curva per gli elementi leggeri rispetto a quella dell'Au risulta maggiore e sembra aumentare col diminuire del numero atomico. Per il Cu il valore della pendenza risulta circa 0,7; per l'Au la pendenza media risulta circa 0,3, benchè la curva per questo metallo non sembri potersi approssimare bene con una legge di tipo esponenziale. Entrambi i valori risultano più alti di quelli indicati da BARBOUR e GREENE <sup>(1)</sup>, e questo pare abbastanza plausibile in quanto i risultati di questi autori si riferiscono ad

Sono stati inoltre calcolati i rapporti:

$$\frac{S_3}{V \cdot v} = I \cdot \sigma,$$

dove  $V$  rappresenta il volume della la-

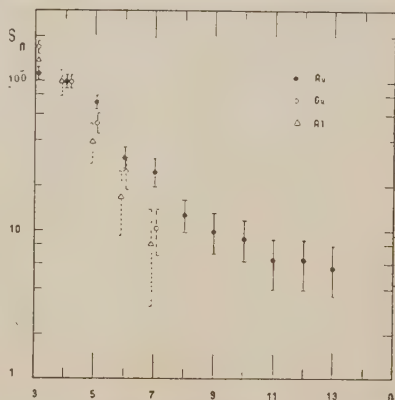


Fig. 1. — Numero di stelle di almeno  $n$  rami in funzione di  $n$ .

mina interessata,  $\nu$  il numero di nuclei per  $\text{cm}^3$ ,  $I$  l'intensità della radiazione generatrice di stelle e  $\sigma$  la sezione efficace dei nuclei. I valori ottenuti sono riportati nella tabella III.

perdita di circa 2,5, il che in parte può essere dovuto ai nostri criteri troppo restrittivi nella selezione delle stelle ed al fatto di aver trascurato la correzione per frenamento nel metallo.

TABELLA III.

	Au	Cu	Al
Stelle per $\text{cm}^2$ e giorno	0,11	0,106	0,055
Stelle per centro e giorno $I \cdot \sigma$	$6,2 \pm 0,5 \cdot 10^{-22}$	$2,4 \pm 0,2 \cdot 10^{-22}$	$2,4 \pm 0,4 \cdot 10^{-22}$

Gli errori statistici relativi ai dati sopra elencati non permettono ancora di pronunciarsi sulla dipendenza della sezione d'urto dal fattore  $A^{2/3}$ .

Il prodotto  $I \cdot \sigma$  per stelle di almeno 3 rami generate in emulsione risulta per le nostre lastre circa  $7 \cdot 10^{-22}$  (1). Ammettendo valida una legge in  $A^{2/3}$ , per il rapporto tra le sezioni d'urto dell'Oro e dell'emulsione, risulta un fattore di

Misure più estese sono in corso su un nuovo gruppo di lastre.

Ringraziamo il prof. A. ROSTAGNI per averci proposto questa esperienza, il prof. N. DALLAPORTA e il prof. O. SPECCHIA per le utili discussioni avute sull'argomento.

Si ringraziano pure la dott. G. BELLIBONI, la dott. A. GEROSA ed il sig. F. PROCOPIO per l'aiuto nell'osservazione.



**Effetto di latitudine sulla distribuzione dei mesoni nell'atmosfera.**

P. CALDIROLA, R. FIESCHI e P. GULMANELLI

*Istituto di Fisica dell'Università - Milano*

(ricevuto il 4 Giugno 1951)

Allo scopo di trarre utili informazioni circa le modalità con cui vengono generati i mesoni dalla radiazione cosmica può essere utile confrontare i dati sperimentali sugli effetti geomagnetici (in particolare sugli effetti di latitudine) con quelli che si possono stabilire teoricamente partendo da un certo schema teorico.

È noto come diverse teorie siano state avanzate per interpretare la produzione dei mesoni: quella della produzione multipla di WATAGHIN <sup>(1)</sup> e di HEISENBERG <sup>(2)</sup>, quella della produzione plurima di HEITLER-JANOSSY <sup>(3)</sup>, quella intermedia di FERMI <sup>(4)</sup>, ecc. Uno di noi <sup>(5)</sup> ha invece sviluppato una teoria essenzialmente fenomenologica che, applicata allo studio di diversi processi <sup>(5)</sup> <sup>(6)</sup> <sup>(7)</sup> <sup>(8)</sup>, si è dimostrata sostanzialmente capace di descrivere in un unico schema tutte le principali proprietà della radiazione cosmica nell'atmosfera. Abbiamo però avuto occasione di osservare <sup>(8)</sup> che un banco di prova abbastanza efficace per saggiare ulteriormente la bontà dello schema assunto, che porta a una produzione praticamente singola (come nella teoria di HEITLER-JANOSSY) per urto fra nucleoni di energia non superiore a 20-30 GeV e con molteplicità crescente (in modo non molto dissimile da quello voluto dalla teoria di FERMI) per energie superiori, fosse quello di studiare l'effetto di latitudine sullo spettro energetico e sulla curva dell'eccesso positivo della componente mesonica. Che questo confronto possa essere abbastanza significativo appare evidente se si tien conto dei risultati dei calcoli di diversi autori, in particolare di quelli accurati di M. FERRETTI SFORZINI <sup>(9)</sup>, che dimostrano come i dati sperimentali sull'effetto di latitudine della componente mesonica siano incompatibili con schemi di produzione dei mesoni a molteplicità elevata.

Nello schema da noi assunto i calcoli si eseguono partendo dalle formule stabilite in <sup>(7)</sup> per la distribuzione nell'atmosfera delle diverse componenti nucleoniche (pro-

<sup>(1)</sup> G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948).

<sup>(2)</sup> W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **126**, 569 (1949).

<sup>(3)</sup> W. HEITLER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 113 (1949); L. JANOSSY: *Phys. Rev.*, **64**, 345 (1943); W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A **42**, 374 (1949).

<sup>(4)</sup> E. FERMI: *Progress in Theor. Phys.*, **5**, 570 (1950).

<sup>(5)</sup> P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949).

<sup>(6)</sup> P. CALDIROLA e A. LOINGER: *Nuovo Cimento*, **7**, 161 (1950).

<sup>(7)</sup> P. CALDIROLA e G. ZIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 575 (1950).

<sup>(8)</sup> P. CALDIROLA e P. GULMANELLI: *Nuovo Cimento*, **8**, 229 (1951).

<sup>(9)</sup> M. FERRETTI SFORZINI: *Nuovo Cimento*, **7**, 196 (1950).

tonica, neutronica e totale) a differenti latitudini e da quelle generali stabilite in <sup>(5)</sup> relative alla distribuzione dei mesoni nell'atmosfera. Si arriva così alle seguenti formule fondamentali (le notazioni sono le stesse usate nei lavori precedenti):

$$g^{\pm}(W, l) = \left(\frac{W}{l}\right)^{B(\delta l + W)} \int_0^l x^{B(\delta l + W)} [W + \delta(l - x)]^{-B(\delta l + W)} \cdot N^{\pm}[x, W + \delta(l - x)] dx,$$

ove:

$$N^{\pm} = \frac{d_2 g^{\pm}}{dW \cdot dl}, \quad d_2 g^{\pm} = \left(\frac{5}{12} p + \frac{1}{6} n\right) \frac{dW}{q} dl, \quad d_1 g = \left(\frac{1}{6} p + \frac{5}{12} n\right) \frac{dW}{q} dl,$$

ricavando le  $p(E)$ ,  $n(E)$  per derivazione delle espressioni  $P(E)$  e  $N(E)$  dedotte in <sup>(7)</sup>.

In queste formule compaiono sostanzialmente due costanti a priori arbitrarie: la frazione  $\varepsilon^*$  dell'energia del nucleone incidente che, nell'urto con un altro nucleone,

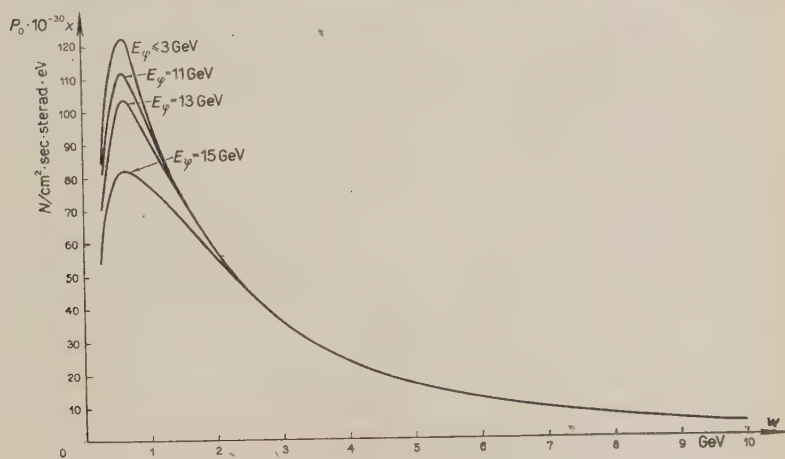


Fig. 1 - Spettro differenziale mesonico all'1.d.m. a differenti latitudini.

viene trasmessa al mesone (o ai mesoni) creato e il valore  $E_{\pi}$  dell'energia critica al disopra della quale ha luogo, secondo il nostro schema, la produzione di mesoni (con sezione d'urto costante). I calcoli eseguiti nelle Note precedenti, non riguardanti in generale effetti geomagnetici, erano poco sensibili al valore numerico assunto per tali parametri, in particolare per quello di  $\varepsilon^*$ . Invece i calcoli ora eseguiti, relativi ad effetti geomagnetici dei mesoni, ne dipendono in modo abbastanza critico: anzi essi possono servire anche per una determinazione più accurata dei valori numerici dei parametri in questione.

I migliori risultati sono stati ottenuti assumendo:

$$E_{\pi} = 3 \text{ GeV}, \quad \varepsilon^* = 0,25,$$

e conservando come valore del coefficiente di assorbimento della componente nucleonica veloce quello di  $125 \text{ g/cm}^2$ .

In fig. 1 sono riportati gli spettri energetici (calcolati) dei mesoni (in direzione

verticale e al livello del mare) corrispondentemente a latitudini caratterizzate da valori diversi dell'energia  $E_\varphi$  del taglio magnetico. Come si vede dalle curve di tale figura, l'effetto di latitudine si fa sentire sui mesoni di bassa energia (inferiore a qualche GeV).

Partendo dagli spettri calcolati alle varie latitudini si è successivamente dedotto (per la corrispondenza fra energia di taglio e latitudini magnetiche si è assunto

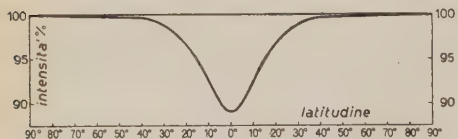


Fig. 2 - Effetto di latitudine della componente mesonica (al l.d.m.).

quella risultante dalla teoria di VALLARTA<sup>(10)</sup>) l'effetto percentuale di latitudine sul numero totale di mesoni (energia  $\geq 0,2$  GeV): i risultati ottenuti sono riportati in fig. 2. Come risulta immediatamente, la curva teorica dell'effetto di latitudine ha l'andamento caratteristico della nota curva sperimentale e anche i valori numerici

calcolati coincidono abbastanza bene con quelli sperimentali<sup>(11)</sup>.

Abbiamo infine calcolato le curve relative all'eccesso positivo differenziale della componente mesonica (al livello del mare) in corrispondenza a diversi valori dell'energia del taglio magnetico. I risultati (normalizzati in modo da tener conto dell'influenza, nella generazione dei mesoni, della presenza di particelle  $\alpha$  e di nuclei più pesanti nella componente primaria) sono riportati in fig. 3. Si vede come l'effetto del campo magnetico consista nel produrre una diminuzione dell'eccesso positivo in corrispondenza delle basse energie dei mesoni.

È interessante osservare che i dati sperimentali finora raccolti riguardano essenzialmente l'effetto di latitudine sull'intensità integrale della componente mesonica e non la dipendenza di tale effetto dall'energia dei mesoni stessi. Orbene, risulta chiaro che uno stretto confronto fra spettri energetici dei mesoni determinati (nelle stesse condizioni sperimentali) a differenti latitudini, come pure il confronto fra curve relative all'eccesso positivo differenziale a latitudini diverse, potrebbe essere di importanza notevole per saggiare ulteriormente l'adequatezza dello schema da noi assunto come pure di qualsiasi teoriarelativa al meccanismo di produzione della componente mesonica. Dati interessanti potrebbero pure ricavarsi studiando a latitudini diverse la dipendenza dello

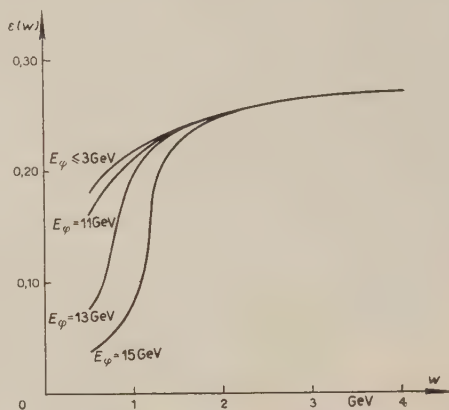


Fig. 3 - Eccesso positivo differenziale a differenti latitudini (al l.d.m.).

<sup>(10)</sup> D. J. X. MONTGOMERY: *Cosmic Ray Physics*, (Princeton, 1949), p. 55

<sup>(11)</sup> D. J. X. MONTGOMERY: *Cosmic Ray Physics*, (Princeton, 1949), p. 127 e segg.

spettro energetico e della curva dell'eccesso positivo differenziale dalla direzione di provenienza dei mesoni.

Vogliamo infine concludere osservando che il ritocco apportato, nel corso di questi ultimi calcoli da noi eseguiti, ai valori numerici dei parametri che intervengono nella nostra teoria porta a un ulteriore lieve miglioramento anche dei vari risultati, pur già soddisfacenti, calcolati nelle diverse note precedenti.

In un prossimo lavoro, a carattere conclusivo, raggrupperemo organicamente i diversi risultati ottenuti a più riprese, completando la discussione della teoria sviluppata nei riguardi del confronto con l'insieme dei risultati sperimentali oggi giorno noti sulle varie componenti della radiazione cosmica nell'atmosfera.

**Un'ipotesi sul meccanismo delle scintillazioni nei cristalli organici.**

M. AGENO e R. QUERZOLI

*Laboratorio di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità - Roma*

(ricevuto il 9 Giugno 1951)

Il fenomeno delle scintillazioni nei cristalli molecolari, quali ad esempio l'antracene, lo stilbene, il terfenile, ecc., possiede com'è noto una caratteristica che lo distingue abbastanza nettamente dagli altri fenomeni di fluorescenza finora conosciuti. Tale caratteristica consiste nel contemporaneo verificarsi dei due fatti seguenti:

a) La legge di decadimento della fluorescenza col tempo ha, nel caso delle scintillazioni, semplice carattere esponenziale <sup>(1)</sup>.

b) La vita media del processo di fluorescenza è, in questo caso, una funzione crescente della temperatura <sup>(2)</sup>.

Com'è ben noto, un processo di fluorescenza a decadimento esponenziale risulta di solito indipendente dalla temperatura, mentre dipendono fortemente dalla temperatura (nel senso che la vita media diminuisce al crescere di quest'ultima) i processi di fluorescenza a decadimento iperbolico o più in generale espresso da leggi di potenze <sup>(3)</sup>. Non sembra quindi

molto facile immaginare un meccanismo capace di render conto contemporaneamente delle caratteristiche *a* e *b*.

La prima di esse sembra indicare che si tratti di un semplice processo di transizione da un livello eccitato della molecola al livello fondamentale. Ciò è in accordo coi risultati dell'analisi spettrale della luce delle scintillazioni, ottenuti da L. ROTH <sup>(4)</sup>. Le vite medie calcolate da M. KASHA <sup>(5)</sup> sulla base dei dati ottici, in questa ipotesi, sono pure dell'ordine di grandezza trovatosperimentalmente. Esse però concordano perfettamente coi dati sperimentali relativi ad eccitazione con luce ultravioletta, mentre le vite medie delle scintillazioni dovute a raggi  $\gamma$  sembrano essere sistematicamente più lunghe per almeno un fattore due <sup>(6)</sup>. Se infine il meccanismo delle scintillazioni interessasse soltanto molecole singole del cristallo, le vite medie dovrebbero comunque decrescere all'aumentare della temperatura contrariamente a quanto sperimentalmente si osserva.

Sembra dunque che vi siano delle indi-

<sup>(1)</sup> A. LUNDBY: *Phys. Rev.*, **80**, 477 (1950).

<sup>(2)</sup> J. O. ELLIOT, S. M. LIEBSON e C. RAVILIOUS: *Phys. Rev.*, **79**, 393 (1950).

<sup>(3)</sup> H. W. LEVERENTZ: *An Introduction to Luminescence of Solids* (New York, 1950), p. 246 e seg.

<sup>(4)</sup> L. ROTH: *Phys. Rev.*, **75**, 983 (1949).

<sup>(5)</sup> Comunicazione privata.

<sup>(6)</sup> S. M. LIEBSON, M. E. BISHOP e J. O. ELLIOT: *Phys. Rev.*, **80**, 907 (1950).



cazioni abbastanza chiare che il processo di fluorescenza che ci interessa non è dovuto ad un meccanismo così semplice come quello sopra accennato.

È tuttavia forse possibile evitare ogni contraddizione coi dati sperimentali, ammettendo che l'energia di eccitazione, anziché rimanere confinata nella molecola inizialmente eccitata, possa migrare attraverso il cristallo da una molecola all'altra. Ciò può, com'è ben noto, avvenire (a parte il caso qui evidentemente da escludersi dell'emissione e successivo riassorbimento in altro punto del cristallo di un quanto) con due meccanismi differenti: quello delle onde di eccitazione (excitons) <sup>(7)</sup> e quello per risonanza, analogo al meccanismo della fluorescenza sensibilizzata nei gas <sup>(8)</sup>. Per quanto il primo dei due non sembri molto probabile in cristalli a legami così deboli come i cristalli molecolari, esso è stato tuttavia recentemente proposto per spiegare la fluorescenza dell'acetone solido eccitato con luce ultravioletta <sup>(9)</sup>.

Non è evidentemente possibile attribuire una variazione delle vite medie in funzione della temperatura a complicazioni del processo attraverso il quale si formano gli stati eccitati che danno poi luogo all'emissione della luce di fluorescenza. Bisogna evidentemente supporre che ciò che varia con la temperatura sia la probabilità dei processi di dissipazione dell'energia di eccitazione, in concorrenza col processo di radiazione. Ci si può forse render conto di come ciò possa avvenire considerando che in ogni cristallo reale sono sempre presenti delle celle difettose in cui, a differenza delle celle normali (molecole), l'energia di eccitazione può rapidamente venir dissipata in successive transizioni tra livelli aggiuntivi

molto vicini e andar quindi perduta ai fini della fluorescenza ordinaria.

Consideriamo allora, ad esempio, il caso delle onde di eccitazione. La probabilità di passaggio dell'energia di eccitazione da una cella all'altra del cristallo dipende evidentemente dalla trasparenza della barriera di potenziale tra cella e cella. Ma la trasparenza dipende esponenzialmente dalle dimensioni della barriera, sicché delle piccole variazioni periodiche di tali dimensioni, dovute alle vibrazioni termiche degli atomi del cristallo, determinano in definitiva un aumento della trasparenza stessa. Con ciò, al crescere della temperatura diventa sempre più probabile che l'energia di eccitazione trasmessa ad una cella difettosa ripassi la barriera di potenziale che separa questa dalle celle normali circostanti, prima di venir dissipata nel modo sopra considerato. Al crescere della temperatura diventa quindi sempre minore il numero delle molecole inizialmente eccitate, la cui energia va effettivamente perduta ai fini della fluorescenza. Una trattazione più accurata <sup>(10)</sup> fa vedere come questa ipotesi porti ad una dipendenza parabolica del reciproco della vita media dalla temperatura: con una scelta opportuna dei parametri si può quindi ottenere un ottimo accordo coi dati sperimentali disponibili.

In modo del tutto analogo si può spiegare l'aumento delle vite medie di scintillazione con la temperatura anche nel caso che la trasmissione dell'energia avvenga per risonanza.

Com'è chiaro, i dati sperimentali finora disponibili sono tutt'altro che sufficienti per convalidare questa ipotesi. Siccome però un'analisi piuttosto dettagliata della questione non ce ne ha finora suggerita un'altra migliore, pensiamo non inutile metterla in discussione.

Osserviamo infine che le curve di

<sup>(7)</sup> J. FRANK e E. TELLER: *Journ. Chem. Phys.*, **6**, 861 (1938).

<sup>(8)</sup> J. FRANK e R. LIVINGSTONE: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 505 (1949).

<sup>(9)</sup> W. E. KASKAN e A. B. F. DUMAN: *Journ. Chem. Phys.*, **18**, 432 (1950).

<sup>(10)</sup> M. AGENO e R. QUERZOLI: *Rend. 1st. Sup. Scint.* (in corso di stampa).

decadimento della fluorescenza col tempo dovuto ad A. LUNDBY <sup>(1)</sup> mostrano una specie di pianerottolo iniziale che l'Autore attribuisce a saturazione del sistema di numerazione. Se ciò fosse vero, le curve a più alta intensità iniziale dovrebbero essere quelle che hanno il pianerottolo

più pronunciato, il che non avviene. È quindi possibile che il fenomeno sia in realtà più complesso di quanto abbiamo considerato fin qui e che l'emissione della luce di fluorescenza con decadimento esponenziale sia preceduta da un altro processo di durata assai più breve.

#### ERRATA-CORRIGE

M. VERDE — Teoria della fotodissociazione e formazione dell' $H_2$  e dell' $He_3$ , 7, 283 (1950).

La formula (7) a pag. 288 va sostituita con la seguente:

$$\tau_z^{(i)} \cdot \tau_z^{(j)} = \pm \tau_z^{(k)} \quad \text{per} \quad \sqrt{2} \tau_z^{(s)} = \mp 1 \quad (i \neq j \neq k)$$

L'espressione dell'energia Coulombiana per l' $He_3$  di pag. 293 va modificata come segue:

$$E_c = \frac{e^2}{3} \left( \sqrt{2} T^s - \tau_z' T^i - \tau_z'' T'' \right) \frac{1}{|r_2 - r_3|}.$$

Per il parametro  $\mu$  si ottiene il valore 1,79. L'andamento generale e l'ordine di grandezza della sezione d'urto (fig. 1 a pag. 300) rimane invariato, il nuovo valore di  $\mu$  produce tuttavia uno spostamento del massimo all'energia di 27 MeV.

## LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

G. MIE: *Die Grundlagen der Mechanik*.  
XI + 80 pag., Ferdinand Enke  
Verlag, Stuttgart, 1950.

L'A. osserva molto giustamente che ancora oggi nell'insegnamento della Fisica non c'è accordo — e spesso anche chiarezza — nell'esposizione dei concetti fondamentali della Meccanica. Dedica quindi questo libretto allo scopo di contribuire a rendere chiari i detti concetti, a beneficio dapprima degli insegnanti e, in conseguenza, degli studenti.

Come è noto, i concetti meccanici più discussi sono quelli di massa e di forza. L'A., oggi ottantatreenne e ben noto anche per il suo classico Trattato di Eletticità e Magnetismo, fa precedere l'esposizione di alcuni concetti preliminari: distanza di due punti, retta, infinitesimo, coordinate di spazio e di tempo, grandezze estensive e intensive. Definita poi la massa con la proporzionalità al volume o al peso, l'A. distingue le varie parti della Fisica a seconda delle nostre sensazioni: la Meccanica è così quella parte corrispondente alle sensazioni muscolari, attraverso cui conosciamo le « Forze ». Con un uso ripetuto del principio di azione e reazione, e mediante opportuni « organi di senso artificiali » (dinamometri, ecc.), è possibile costruire una « scala razionale » delle forze (grandezze intensive, come la temperatura, ecc.). Il seguito della esposizione è dedicato a definire i concetti meccanici più importanti: la risultante, il momento, i campi, l'energia, il lavoro, la relatività del moto.

In conclusione si può dire che il volumetto può effettivamente costituire una guida all'insegnante che, trascurato l'aspetto critico delle questioni, voglia adottare il punto di vista dell'A. Si può tuttavia osservare che detto punto di vista, se evita le difficoltà della scuola « descrittiva » di KIRCHHOFF e di quella dinamica di MACH, è anch'esso poco soddisfacente per il suo eccessivo carattere antropomorfo (che è evitato per esempio nella cosiddetta scuola del « filo » di REECH). Qualche altra osservazione si potrebbe fare su certe definizioni adottate dall'A. (infinitesimo, energia, ecc.), che però qui sono ripetute dal Trattato di Eletticità sopra citato.

A. BORSELLINO

EVANGELISTA TORRICELLI: *nel terzo centenario della sua morte*. IX + 102 pagg. Firenze. Soc. ed. Università, 1951.

L'Università di Firenze, l'Accademia torricelliana e la Città di Faenza, che al TORRICELLI dette i natali, promossero nel 1948 solenni celebrazioni commemorative, in occasione del terzo centenario della morte di questo insigne Scienziato. È sembrato quindi opportuno pubblicare una larga documentazione di queste celebrazioni, la quale valesse a dimostrare, per sommi capi, il loro svolgimento, e a tramandarne e perpetuarne il ricordo.

Il presente volume, pubblicato per iniziativa e a cura dell'Università di Fi-

renze, contiene appunto il testo delle conferenze che furono tenute nelle Aule di Arcetri, nella sede della « Leonardo da Vinci » e nel Palazzo di Arte Guelfa, da insigni Maestri dell'Ateneo fiorentino e di altre Università, nonchè un'ampia indagine di carattere storico sui manoscritti torricelliani conservati a Firenze, con la loro completa elencazione.

La poliedrica personalità di EVANGELISTA TORRICELLI, fisico, matematico, costruttore di strumenti ottici, cultore della Meccanica, viene posta in singolare rilievo da questa raccolta; la quale, preceduta da una larga prefazione dettata dal prof. BORCHI, Rettore dell'Università di Firenze, si inizia con uno studio su « Evangelista Torricelli fisico », a cura del prof. TIERI. Questo studio è particolarmente dedicato alle ricerche di meteorologia e — in special modo — all'invenzione del barometro, cioè alla più nota e importante scoperta scientifica, realizzata per opera del TORRICELLI.

A « Evangelista Torricelli ottico », è dedicato un ampio studio del prof. RONCHI; il quale, dopo avere illustrato l'eccezionale abilità, anche manuale, del TORRICELLI, nella costruzione di perfettissime lenti, enuncia (e conforta con validi argomenti) l'ardita ipotesi che il TORRICELLI avesse scoperto un metodo di carattere interferenziale per il controllo delle superfici, precorrendo di qualche secolo la tecnica moderna.

Il prof. CARRUCCIO ci presenta il TORRICELLI come precursore dell'analisi infinitesimale, con l'estensione della teoria di Bonaventura Cavalieri agli indivisibili curvi, col calcolo di integrali di funzioni aventi punti di infinito, con la rettificazione della spirale logaritmica; e, soprattutto, con la determinazione di leggi generali, ottenuta mediante un acutissimo esame di molteplici casi particolari.

Il contributo di TORRICELLI al progresso della Meccanica è stato illustrato dal prof. CALDONAZZO. Anche in questo campo, il TORRICELLI ha saputo elevarsi, da casi particolari, a regole generali, sia

nella determinazione dei centri di gravità, sia nello studio del moto dei gravi e dei proiettili. Ma il suo più alto contributo deve essere ricercato nella meccanica dei liquidi, e separatamente nell'idrodinamica, di cui il TORRICELLI può essere proclamato il fondatore, col suo celebre teorema sulla velocità di efflusso.

Un'ampia documentazione storica di PIETRO PAGNINI sugli inventari del Museo degli Strumenti Antichi di Firenze, al fine di rilevare e descrivere il ricco materiale che proviene dall'eredità del TORRICELLI, e un completo indice dei manoscritti torricelliani, redatto da ANGELO PROCISSI, chiudono il volume, che contribuirà indubbiamente a estendere la conoscenza delle altissime benemeritenze di EVANGELISTA TORRICELLI, e a eternarne la memoria.

T. COLLODI

LUIGI AMERIO: *Funzioni analitiche e trasformazione di Laplace*. Libreria editrice politecnica Cesare Tamburini, Milano, 1951. Prezzo L. 1.300.

Il libro è una raccolta in litografie delle lezioni tenute dall'AMERIO al Politecnico di Milano nel Corso di Complementi di Analisi matematica.

Nel primo capitolo si trovano esposte le nozioni fondamentali relative alle funzioni analitiche di una variabile complessa. Vengono anche studiate le polidromie di tali funzioni e dati alcuni cenni sulla rappresentazione conforme e sugli integrali euleriani.

Nel secondo capitolo è svolta in modo succinto ma esauriente per i successivi sviluppi una teoria generale della trasformazione di Laplace. Le applicazioni di questa trovansi al capitolo terzo in cui vengono considerati problemi di integrazione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti o funzioni lineari della variabile indipendente, nonchè la equazione di Bessel, dei cui integrali ven-



gono considerate talune significative proprietà. Notevoli le applicazioni allo studio di circuiti elettrici. Ulteriori applicazioni trovansi al capitolo quarto dove viene applicata la trasformazione di Laplace a problemi di elettrotecnica traducendosi in equazioni a derivate parziali lineari (equazione dei telegrafi). È da ricordare che a tale ordine di questioni l'AMERIO ha portato rimarchevoli contributi personali.

Lo stile del libro, piano e vorrei dire piacevole, è perfettamente rispondente allo scopo a cui esso è dedicato, cioè di mettere in modo rapido lo studioso di ingegneria in possesso di strumenti e di metodi matematici di grande interesse applicativo. Pur senza deflettere dal più assoluto rigore logico, la trattazione è sempre tenuta su un piano che ne consente la facile assimilazione anche da parte di chi studia la matematica unicamente come mezzo e non come fine a se stessa.

È augurabile che questa opera, forse anche con qualche piccola integrazione (ad esempio un cenno sulle superficie di Riemann, nella prima parte, e qualche ulteriore esempio di applicabilità della trasformata di Laplace al di fuori dell'elettrotecnica, nella seconda), possa al più presto essere presentata al pubblico in una edizione a stampa.

G. FICHERA

F. OBERHETTINGER und W. MAGNUS - *Anwendung der Elliptischen Funktionen in Physik und Technik*. Un volume in-8° (della raccolta «Die Grundlagen der math. Wiss. in Einzeldarstellungen») di 126 pagine, con 54 figure, 1ª edizione. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1949.

Con questo volumetto gli autori offrono ai fisici e ai tecnici un valido strumento di immediata utilità per la risol-

zione dei problemi pratici che richiedono l'applicazione delle funzioni ellittiche.

Nei capitoli I e II vengono definite le varie funzioni di Jacobi e di Weierstrass che intervengono nella teoria generale delle funzioni ellittiche, e le loro proprietà che hanno importanza per le applicazioni vengono elencate e brevemente illustrate da opportuni commenti. Speciale rilievo viene dato alle funzioni  $\theta$  di Jacobi perchè esse si prestano notoriamente assai meglio delle analoghe funzioni  $\sigma$  di Weierstrass per il calcolo numerico. Le funzioni  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$  e la funzione  $p$  di Weierstrass vengono poi utilizzate per la rappresentazione conforme di domini di varia forma su un dominio circolare di raggio unitario. Nei rimanenti capitoli III, IV e V le proprietà delle funzioni ellittiche precedentemente illustrate vengono applicate alla risoluzione di uno svariato numero di problemi di elettrostatica, di idro- e aerodinamica e di meccanica. Dei problemi trattati alcuni sono classici, per esempio quelli delle oscillazioni finite del pendolo e del potenziale relativo ad un ellissoide carico di elettricità, mentre la maggior parte illustrano l'applicazione delle funzioni ellittiche a ricerche relativamente recenti: viene svolta, ad esempio, la nota teoria di GLAUERT (1932) sul comportamento di un profilo alare immerso in un tunnel aerodinamico a sezione rettangolare. I problemi scelti danno nel loro insieme una chiara idea orientatrice dei vari campi della fisica e della tecnica in cui le funzioni ellittiche trovano utile applicazione.

Il libro è scritto in forma sintetica, ma chiara ed esauriente dal punto di vista applicativo, e si presenta in ottima veste tipografica; esso, anche per la carenza di moderne trattazioni consimili, è senza dubbio di valido aiuto a chi deve utilizzare le funzioni ellittiche per scopi pratici.

L. ORSONI





# ATTI DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

a cura di G. C. DALLA NOCE, Segretario

---

In seguito a una sovvenzione, che l'Associazione Industriali di Trieste ha recentemente deliberato a vantaggio della nostra Società, si rende noto che alla lista dei Premi e Borse di studio per il 1951 posti a concorso con bando del 31 Maggio scorso, pubblicato nel precedente fascicolo del *Nuovo Cimento*, serie IX, vol. VIII, n. 6, pag. 439-440, deve essere aggiunta un'ulteriore

— Borsa di lire 500 000 (cinquecentomila) indivisibili, intitolata « Borsa di studio per la Fisica, dell'Associazione Industriali di Trieste », istituita da detta Associazione.

Le norme del Concorso a questa Borsa sono quelle medesime stabilite per le altre di cui al bando sopra ricordato.

*Milano, 15 Giugno 1951.*

*Il Segretario:* G. C. DALLA NOCE

*Il Presidente:* G. POLVANI

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA